# Chapitre 3. Théorie des jeux non coopératifs

La théorie des jeux comporte deux branches : jeux coopératifs (exclu ici) et jeux non coopératifs. La différence est dans l'unité d'analyse, i.e. le jugement au nom duquel les décisions sont prises.

- Jeux coopératifs : l'unité est le groupe (que ce soit la société tout entière ou une partie, coalition) qui cherche le plus grand gain (le contenu du gain est à préciser, il n'est pas forcément monétaire)
- Jeux non coop : l'unité d'analyse est le joueur qui maximise son gain. Dans un jeu non coopératif, un agent peut avoir un comportement dit 'coopératif' (i.e. allant dans l'intérêt du groupe) mais seulement s'il se trouve que son intérêt individuel se trouve maximisé lorsque l'intérêt du groupe est maximisé, i.e. si son comportement a priori non coopératif choisit une action qui va de fait dans le sens du gain du groupe. Le cadre est non coopératif même si la solution peut être coopérative.

## I. Définition et règles

Deux manières de représenter un jeu : forme stratégique ou normale = tableau / forme extensive = arbre. La 2$^{\text{nde}}$ représentation est toujours possible mais surtout utile pour les jeux séquentiels (à plusieurs étapes successives). On étudie ici les jeux à un coup (= à 1 étape) donc *forme normale ou stratégique*.

**Jeu défini par 4 éléments :**

- Liste des joueurs ($n$, $n \geq 2$) (dans les premiers exemples ci-dessous, $n$ = 2)
- Pour chacun, son ensemble de stratégies : ensemble discret (2 choix) ou continu (infinité de choix)
- Pour chaque n-uplet de stratégies, les gains associés pour chaque joueur.
- Règles du jeu. Ici, jeux non coop, à 1 étape (= non séquentiel, non répété, à choix simultanés, donc dans l'ignorance *a priori* du choix de l'autre).

Chacun décide dans le but de maximiser son gain, mais sur la base d'informations qui ne le concernent pas seulement : informations sur les autres joueurs (leur nombre, leurs stratégies, leurs gains) et anticipations sur le comportement des autres.

A partir de ces éléments, on a des concepts de solutions de jeux : des cas les plus simples (équilibre en stratégies dominantes) aux plus élaborés (équilibre de Nash).

## II. Stratégies discrètes. Equilibre en stratégies dominantes

### 1. Lecture du tableau

**Jeu 1**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (2 , 2) | (1, 3) |
| $a_2$ | (3, -1) | (0, 0) |
| $a_3$ | (4, 3) | (2, 4) |

2 joueurs : *A* et *B* ;

Ensemble de stratégies de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ; ensemble de stratégies de $B = \{b_1, b_2\}$

Gains indiqués dans le tableau : (1,3) se lit : « si *A* choisit $a_1$ et *B* choisit $b_2$, le gain de *A* est 1, celui de *B* est 3.

### 2. Détermination des stratégies dominantes

**Jeu 1**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (2 , 2) | (1, 3) |
| $a_2$ | (3, -1) | (0, 0) |
| $a_3$ | (4, 3) | (2, 4) |

Si *A* choisit $a_1$, il obtient soit 2 (si *B* choisit $b_1$), soit 1 (si *B* choisit $b_2$).

Si *A* choisit $a_2$, il obtient soit 3 (si *B* choisit $b_1$), soit 0 (si *B* choisit $b_2$).

Si *A* choisit $a_3$, il obtient soit 4 (si *B* choisit $b_1$), soit 2 (si *B* choisit $b_2$).

Quel que soit le choix de B, $a_3$ procure à A un gain strictement supérieur à celui que procurent $a_1$ et $a_2$ : $a_3$ est une stratégie strictement dominante.

Une stratégie strictement dominante pour un agent est telle que, quel que soit le choix de l'autre, elle lui procure toujours un gain strictement supérieur à celui que lui procurerait n'importe laquelle des autres stratégies dont il dispose.

Maximiser son gain conduit A à choisir $a_3$.

De même

Si $B$ choisit $b_1$, il obtient 2 (si $A$ choisit $a_1$), -1 (si $A$ choisit $a_2$) ou 3 (si $A$ choisit $a_3$)

Si $B$ choisit $b_2$, il obtient 3 (si $A$ choisit $a_1$), 0 (si $A$ choisit $a_2$) ou 4 (si $A$ choisit $a_3$)

Donc quel que soit le choix de A, $b_2$ lui procure un gain supérieur à celui que procure $b_1$: $b_2$ est une stratégie dominante.

## 3. Equilibre et optimalité

Ce jeu a un équilibre en stratégies dominantes : ($a_3$, $b_2$). La max° du gain par chaque joueur suffit à quiconque pour prédire l'issue du jeu.

L'équilibre en stratégies dominantes ici est un optimum de Pareto (OP), car on ne peut améliorer la situation d'aucun agent sans détériorer celle de l'autre : on ne peut améliorer la situation de A qu'au détriment de B et on ne peut pas améliorer la situation de B.

Il y a deux OP dans ce jeu : ($a_3$, $b_1$) et ($a_3$, $b_2$) et l'équilibre en stratégies dominantes en est un.

**Jeu 1**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (2 , 2) | (1, 3) |
| $a_2$ | (3, -1) | (0, 0) |
| $a_3$ | (4,3) OP | (2,4) OP |

Un changement minimal sur les gains de B, comme dans le jeu 1 bis, rend l'équilibre sous-optimal, car dominé par ($a_2$, $b_1$) :

**Jeu 1 bis**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (2 , 2) | (1, 3) |
| $a_2$ | (3,5) OP | (0,6) OP |
| $a_3$ | (4,3) OP | (2,4) |

Le jeu 1 bis a 3 OP : ($a_2$, $b_1$), ($a_2$, $b_2$), ($a_3$, $b_1$).

La stratégie dominante de $A$ reste $a_3$, celle de $B$ reste $b_2$, il reste donc un équilibre en stratégies dominantes, ($a_3$, $b_2$), mais il n'est plus un OP puisqu'il est dominé par ($a_2$, $b_1$).

Pourtant, il n'y a aucune chance que les joueurs choisissent ($a_2$, $b_1$) de manière non coopérative : le jeu non coopératif les fait choisir une issue collectivement irrationnelle : il serait dans l'intérêt des deux agents de se coordonner sur ($a_2$, $b_1$) mais la recherche du gain dans un jeu non coop leur fait manquer cet intérêt commun. C'est un ***paradoxe de la rationalité***. Des agents choisissent rationnellement une solution collectivement irrationnelle. L'exemple type est le dilemme du prisonnier, l'équilibre en stratégies dominantes n'est pas un OP. cf. exo 1 dossier 4.

Remarque : on a beaucoup dit que les économistes (i.e. Smith, Arrow et Hahn) avaient 'cru' à la main invisible' et que le dilemme du prisonnier (plus généralement les équilibres en stratégies dominantes sous-optimaux) montre que ça ne fonctionne pas. On n'a pas attendu le dilemme du prisonnier (assez simple) pour avoir idée des difficultés à faire coïncider rationalité individuelle et rationalité collective. Les conditions concurrentielles disent la difficulté de garantir la compatibilité entre rationalités, individuelle et collective.

## III. Stratégies discrètes. Elimination itérative des stratégies dominées

**Jeu 2**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (3 , 6) | (7, 1) |
| $a_2$ | (5, 1) | (8, 2) |
| $a_3$ | (6, 0) | (6, 2) |

<u>Première étape</u> (fictive = étape dans le raisonnement)

Pas de stratégie dominante pour A, ni pour B.

Raisonnement par étapes : élimination successive des stratégies dominées = stratégies qui ne sont jamais choisies par un agent car conduisent, quel que soit le choix de l'autre agent, à un gain moindre qu'une des autres stratégies.

Pour $A$, $a_1$ est strictement dominée par $a_2$ : A ne choisit jamais $a_1$.

Deuxième étape (fictive)

B a toutes les infos sur le jeu. Il sait $A$ rationnel, il sait que $a_1$ est exclu par $A$, il exclut donc les issues ($a_1$,$b_1$) et ($a_1$, $b_2$).

Jeu 2

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (3 , 6) | (7, 1) |
| $a_2$ | (5, 1) | (8, 2) |
| $a_3$ | (6, 0) | (6, 2) |

Alors, $b_2$ devient dominante (et $b_1$ dominée).

Troisième étape (fictive)

*A* sait que *B* est rationnel et que *B* sait que lui-même (*A*) est rationnel. Il prévoit que B ne peut choisir $b_1$. A choisit $a_2$. La solution est ($a_2$, $b_2$)

**Jeu 2**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (3 , 6) | (7, 1) |
| $a_2$ | (5, 1) | (8, 2) |
| $a_3$ | (6, 0) | (6, 2) |

A choisit $a_2$.

La solution est ($a_2$, $b_2$)

**Jeu 2**

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (3 , 6) | (7, 1) |
| $a_2$ | (5, 1) | (8, 2) |
| $a_3$ | (6, 0) | (6, 2) |

Pour déterminer un équilibre de ce type (par élimination itérative des stratégies dominées), on doit supposer non seulement que les agents sont rationnels mais que chacun sait que les autres le sont, et que les autres savent que chacun l'est etc. ***La rationalité est connaissance commune***. Ce qui permet de prévoir ce que seront, ou ne seront pas, les choix de l'autre même si les choix sont simultanés donc dans l'ignorance des choix réellement faits par l'autre.

Remarque : la rationalité connaissance commune ne va pas de soi. Un agent peut avoir intérêt à faire croire qu'il est irrationnel (dissuasion nucléaire, comportements capricieux).

Ici, l'équilibre par élimination des stratégies dominées est l'un des deux OP (l'autre OP est ($a_1$ ,$b_1$) mais ce n'est pas systématique (cf. exo 3 dossier 4).

Les deux concepts de solution vus précédemment (équilibre en stratégie dominante, équilibre par élimination des stratégies dominées) semblent assez évidents ou intuitifs. Mais le plus souvent, les jeux ne comportent pas d'équilibre des types qui précèdent. D'où le concept d'équilibre de Nash.

## IV. Equilibre de Nash (NE)

**Jeu 3**

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | (6 , 7) | (2 , 2) | (7 , 8) |
| $a_2$ | (2 , 3) | (3 , 4) | (- 8 , 3) |
| $a_3$ | (4 , 10) | (2 , 1) | (8 , 9) |

### 1. Fonctions de meilleure réponse

On décrit les comportements rationnels par les fonctions de meilleure réponse

Fonction de meilleure réponse de A

Si A pense que B choisit $b_1$, $A$ choisit $a_1$.

Si A pense que B choisit $b_2$, $A$ choisit $a_2$.

Si A pense que B choisit $b_3$, $A$ choisit $a_3$.

A ne peut que 'penser', 'imaginer', 'anticiper', mais ni observer ni prévoir ce que sera le choix de l'autre. En effet, le jeu est à un coup, les choix sont simultanés donc chaque choix est fait dans l'ignorance du choix de l'autre. Si aucun élément (de type stratégie dominante ou stratégie dominée) ne permet de prévoir le choix de l'autre, l'anticipation du choix de l'autre est aléatoire, sans fondement.

Fonction de meilleure réponse de B

Si B pense que A choisit $a_1$, $B$ choisit $b_3$.

Si pense que A choisit $a_2$, $B$ choisit $b_2$.

Si pense que A choisit $a_3$, $B$ choisit $b_1$.

Rien ne permet d'élire une issue (i.e. un couple de stratégies qui seraient choisies) plutôt qu'une autre, comme on le faisait dans les jeux 1 et 2. L'hypothèse de rationalité, comme norme de comportement pour le théoricien et pour les joueurs ne suffit pas à prédire l'issue de ce jeu. Toutes les issues sont également possibles.

Les issues possibles dépendent *a priori* :

- des anticipations (sans fondement rationnel) des agents sur le choix de l'autre.
- du comportement face au risque : A (respectivement B) peut préférer tenter l'issue qui peut lui procurer le gain le plus élevé ($a_3$) ou minimiser le risque de perte (pas $a_2$).

On a toutefois établi la fonction de meilleure réponse de $A$ aux choix de $B$, et réciproquement (même si ces fonctions ne sont pas observées puisqu'on observe seulement des choix).

## 2. Equilibre et optimalité

Equilibre de Nash (NE) = point fixe : un NE est un couple de stratégies $(a_i, b_j)$ tel que

$a_i = MR_A(b_j)$ et $b_j = MR_B(a_i)$

Dans le jeu 3, il existe un NE unique : $(a_2, b_2)$.

$MR_A(b_1) = a_1$.

$MR_A(b_2) = a_2$.

$MR_A(b_3) = a_3$.

$MR_B(a_1) = b_3$.

$MR_B(a_2) = b_2$.

$MR_B(a_3) = b_1$.

**Optimalité**

**Jeu 3**

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | (6 , 7) | (2 , 2) | (7 , 8) |
| $a_2$ | (2 , 3) | (3 , 4) | (- 8 , 3) |
| $a_3$ | (4 , 10) OP | (2 , 1) | (8 , 9) OP |

L'équilibre unique ($a_2$, $b_2$) est sous-optimal, dominé par ($a_1$, $b_1$), ($a_1$, $b_3$), ($a_3$, $b_1$) et ($a_3$, $b_3$). Le jeu contient deux OP : ($a_3$, $b_1$) et ($a_3$, $b_3$).

Remarque. Les NE forment un ensemble plus large d'équilibres que les équilibres en stratégies dominantes ou par élimination des stratégies dominées, mais l'ensemble des NE inclut l'ensemble des équilibres en stratégies dominantes et l'ensemble des équilibres par élimination des stratégies strictement dominées. A ces équilibres, il en ajoute d'autres.

## 3. Interprétation de l'équilibre de Nash

Comment advient-il ? non-déviation ou non- regret

**Jeu 3**

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | (6 , 7) | (2 , 2) | (7 , 8) |
| $a_2$ | (2 , 3) | (3 , 4) | (- 8 , 3) |
| $a_3$ | (4 , 10) OP | (2 , 1) | (8 , 9) OP |

Deux interprétations de l'équilibre de Nash

- Interprétation très approximative (incorrecte mais utile parce qu'intuitive) :
  NE = situation dont aucun agent n'a intérêt à dévier *unilatéralement*, i.e. tel qu'aucun agent, considérant le choix de l'autre comme une donnée, ne désire pas changer son propre choix.
  Cette interprétation est utile pour une intuition rapide. On se place sur le tableau et on se demande un agent aurait intérêt à 'dévier', i.e. on se demande, en comparant les gains de A, s'il a intérêt à 'glisser verticalement' ; en comparant les gains de B, s'il a intérêt à 'glisser horizontalement'. Par exemple, dans le jeu 3,

($a_1$ , $b_1$) n'est pas un NE parce que B voudrait 'dévier' en ($a_1$ , $b_3$), mais celui-là n'est pas un NE car A voudrait 'dévier' en ($a_3$, $b_3$), mais c'est encore raté car B voudrait 'dévier' en ($a_{13}$, $b_1$), et là A voudrait 'dévier' en ($a_1$ , $b_1$). Aucune de ces 4 issues n'est un NE. Vous pouvez vérifier que ($a_2$, $b_1$), ($a_2$, $b_3$), ($a_1$ , $b_2$) et ($a_3$ , $b_2$) n'en sont pas non plus.

Pourtant, cette interprétation est incorrecte parce qu'on étudie des jeux à un coup et choix simultanés. Une fois les choix faits, nul ne peut en dévier d'après les règles : on ne joue qu'une seule fois. L'équilibre de Nash dans un jeu à une étape ne peut pas être le résultat d'un processus. Au mieux, c'est un processus mental comme lorsqu'existe un équilibre par élimination des stratégies dominées, mais pas un processus réel.

D'ailleurs, même si on concevait le NE comme résultat d'un processus de révision des choix des agents après observation du choix de l'autre, il faudrait faire deux remarques :

(i) La déviation unilatérale suppose que chaque agent prend le choix de l'autre comme donné, i.e. en supposant qu'il est indépendant du sien. Or les agents voyaient les autres modifier leur choix en observant le leur, leur croyance (le choix de l'autre est indépendant du mien) serait contredite par ce qui est observé (l'autre modifie son choix alors que rien n'a changé pour lui sauf d'observer mon propre choix : c'est donc que son choix dépend du mien !).

(ii) Si les choix sont effectués simultanément mais plusieurs fois, il faut des jeux répétés. Alors, l'ensemble des équilibres d'un jeu répété peut être beaucoup plus large que l'ensemble des équilibres du jeu à un coup… hors programme.

- *Interprétation correcte* : un NE est une situation de non-regret : aucun agent ne regrette son choix, après avoir observé le choix de l'autre. Comme chacun a agi en anticipant le choix de l'autre, l'absence de regret suppose qu'il a correctement anticipé ce choix. Or l'anticipation est formulée au hasard, sans fondement rationnel (elle n'est pas irrationnelle, elle n'est pas rationnelle). L'équilibre de Nash (NE) est donc le résultat des choix rationnels des agents d'une part (chacun maximise son gain, c'est ce qui permet de construire les fonctions de meilleure réponse) et de leurs anticipations sur le choix de l'autre d'autre part (anticipations sans lien avec la rationalité ni avec l'observation). Le NE se réalise si les agents anticipent correctement le choix de l'autre. Les solutions qui ne sont pas des NE ne peuvent arriver que par erreur d'anticipation des agents sur le choix de l'autre. Mais rien ne garantit l'absence d'erreur dans l'anticipation.

## 4. NE multiples et conventions

Jeux de coordination

**Jeu 4**

| | Droite | Gauche |
|---|---|---|
| Droite | (1 , 1) | (-1, -1) |
| Gauche | (-1, -1) | (1, 1) |

Histoire : règle de conduite automobile. Chacun décide avant d'avoir observé le choix de l'autre. Ils courent le risque d'une issue sous-optimale parce qu'ils anticipent mal le choix de l'autre (« il a l'air d'un anglais, il va choisir 'gauche', faisons de même », pense l'un, « c'est un français, etc. » pense l'autre. Drame de la coordination sous-optimale.

**Jeu 4 bis. Guerre des sexes**

| | $b_1$ : foot | $b_2$ : ballet |
|---|---|---|
| $a_1$ : foot | (2 , 1) | (0 , 0) |
| $a_2$ : ballet | (0 , 0) | (1 , 2) |

**Jeu 4 ter. Poule mouillée**

| | $b_1$ : je reste | $b_2$ : je m'écarte |
|---|---|---|
| $a_1$ : je reste | (-2 , -2) | (1 , -1) |
| $a_2$ : je m'écarte | (-1 , 1) | (0 , 0) |

Dans chaque jeu, deux équilibres de Nash. Aucun ne peut être considéré comme une prédiction. En effet, cela dépend des croyances de A et de B. Pas d'accord préalable possible car pas de jeu si accord.

Toutes les issues sont également possibles.

Pb de coordination différent du dilemme du prisonnier, où l'éq se réalise mais sous-optimal. Ici, les OP sont des NE mais difficulté à se coordonner autour d'un OP même s'il est un NE.

Une convention préalable peut être le moyen de sélectionner un OP et de garantir sa réalisation. Cette convention, parce qu'elle est un NE, sera respectée si chacun pense que les autres la respectent. Nul n'a intérêt à enfreindre la convention s'il pense que les autres la respectent. Nul n'a de raison de penser que les autres ne la respectent pas.

**Inversement, si les OP ne sont pas des NE** (DP et beaucoup d'autres jeux), alors des conventions préalablement décidées pour faire appliquer les OP ne sont pas respectées. Les agents, même s'ils s'accordent préalablement, n'ont aucun moyen de faire appliquer un accord sur un OP qui n'est pas un NE. Les prisonniers ont beau comprendre la situation, peut-être même s'être mis d'accord entre eux préalablement pour ne pas se dénoncer (voir exo 1 td 4), rien ne permet l'application de cette résolution, à moins de modifier la matrice des gains. Cf. Hobbes, *Le Léviathan* : la seule solution est dans l'abandon par chacun de sa liberté de décision.

- ⇨ Parce qu'il dépend d'anticipations sur le choix de l'autre qui n'ont pas de fondement, le concept de NE ne peut pas toujours permettre de prédire l'issue d'un jeu. Mais il peut mettre en évidence la difficulté de coordination autour d'une situation optimale : les issues qui ne sont pas des NE ne peuvent se produire que par hasard, sur la base d'une erreur d'anticipation.

**Jeu 5. Chasse au cerf**

| | Cerf | Lièvre |
|---|---|---|
| Cerf | (2 , 2) | (0, 1) |
| Lièvre | (1, 0) | (1, 1) |

Rousseau raconte d'abord la fiction de l'état de nature, qui est celui où « la condition de l'homme naissant » est celle « d'un animal borné d'abord aux pures sensations, et profitant à peine des dons que lui offrait la nature, loin de songer à lui rien arracher », i.e. qui vit seul, se reproduit au hasard de rencontres jamais renouvelées, se nourrit non de chasse mais de cueillette.

Un hasard historique le fait sortir de cette condition animale. Mais il se présente des difficultés et, dans une première socialisation des hommes réunis en 'troupeau', naissent les premières actions collectives :

> Instruit par l'expérience que l'amour du bien-être est le seul mobile des actions humaines, il se trouva en état de distinguer les occasions rares où l'intérêt commun devait le faire compter sur l'assistance de ses semblables, (…) Dans le premier cas il s'unissait avec eux en troupeau, ou tout au plus par quelque sorte d'association libre qui n'obligeait personne, et qui ne durait qu'autant que le besoin passager qui l'avait formée. (…) Voilà comment les hommes purent insensiblement acquérir quelque idée grossière des engagements mutuels, et de l'avantage de les remplir, mais seulement autant que pouvait l'exiger l'intérêt présent et sensible ; car la prévoyance n'était rien pour eux, et loin de s'occuper d'un avenir éloigné, ils ne songeaient pas même au lendemain. S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder fidèlement son poste ; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivit sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il ne se souciât fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons. (*Discours sur l'origine de l'inégalité*)

La plupart des théoriciens des jeux modélisent et commentent ainsi : (cerf ; cerf ) Pareto-domine (lièvre, lièvre), les deux sont des NE, mais (lièvre, lièvre) peut apparaître « plus prudent » : chaque joueur choisit entre deux stratégies dont l'une minimise le risque, est 'prudente' parce qu'elle garantit de gagner 1.

Objections

- Cela ne vaut pas si les joueurs se mettent d'accord sur (cerf, cerf), ce qui correspond à « l'idée grossière des engagements mutuels [= accord préalable] et de l'avantage de les remplir [c'est un OP] » et si cet engagement mutuel est un NE : il n'y a aucun intérêt à dévier unilatéralement.
- L'argument de Rousseau n'est pas que les chasseurs sont prudents et renoncent au cerf parce qu'ils prévoient la possible défaillance d'autrui, et donc dévient non pas unilatéralement mais parce qu'ils supposent que les autres ont déjà varié. L'argument de Rousseau est au contraire que les chasseurs sont imprévoyants et méconnaissent leur intérêt véritable qui serait prévoyant : « … l'avantage de les remplir, mais seulement autant que pouvait l'exiger *l'intérêt présent et sensible* ; car *la prévoyance n'était rien pour eux*, et loin de s'occuper d'un avenir éloigné, ils ne songeaient pas même au lendemain ». Dans le texte de Rousseau, celui qui abandonne la chasse au cerf pour courir le lièvre n'imagine même pas qu'un de ses compagnons pourrait avoir déjà fait de même : il abandonne tout de suite sans même songer à ses compagnons parce qu'en voyant passer le lièvre, il oublie qu'il préférait le cerf, sa matrice de gain change : il était bien d'accord au départ, mais sa perception de son intérêt est perturbée et on retrouve une situation du type dilemme du prisonnier.

**Jeu 5 bis**

| | Cerf | Lièvre |
|---|---|---|
| Cerf | (2 , 2) | (0, 3) |
| Lièvre | (3, 0) | (1, 1) |

L'exemple de Rousseau est donc mal choisi. Le jeu 5 bis pourrait convenir, parce que (lièvre, lièvre) n'est plus un NE : on retrouve un éq par stratégies dominantes, sous-optimal.

Mais la possibilité qu'existent plusieurs NE est présente, cf. exo 3 dossier 5. Difficile de choisir quand l'un ne Pareto-domine pas l'autre.

## 5. L'absence d'équilibre de Nash

Cas fréquent au-delà des jeux à somme nulle.

**Jeu 6**

| | Pile | Face |
|---|---|---|
| Pile | (1 , -1) | (-1 , 1) |
| Face | (-1, 1) | (1, -1) |

**Jeu 6 bis**

| | Pierre | Feuille | Ciseaux |
|---|---|---|---|
| Pierre | (0 , 0) | (-1 , 1) | (1, -1) |
| Feuille | (1, -1) | (0, 0) | (-1, 1) |
| Ciseaux | (-1, 1 ) | (1, -1 ) | (0, 0) |

Il n'y a ni stratégie dominante, ni stratégie dominée, ni équilibre de Nash.

Le jeu ne peut se jouer (et indéfiniment !) que parce que les joueurs ne peuvent pas anticiper le choix d'autrui. Le concept de NE ne permet pas d'élire une solution parmi toutes. Solution mathématique (interprétation délicate) est d'introduire des stratégies mixtes au lieu de stratégies pures. Les stratégies pures consistent à choisir une action (pierre, feuille ou ciseaux, le 'ou étant exclusif). Les stratégies mixtes consistent à choisir une distribution de probabilité sur les actions (par exemple, je peux choisir de jouer chaque action à 33%). Hors programme.

## V. Stratégies continues

### 1. Définition

Mêmes hypothèses sur les joueurs ($n \geq 2$, souvent $n = 2$), mais les ensembles de stratégies peuvent prendre une infinité de valeurs.

Choisir un nombre entier entre 0 et 10 est un choix en stratégies discrètes, dénombrables. Choisir un réel entre 0 et 10 est un choix en stratégies continues, choix parmi une infinité de stratégies. Ce qui est le cas le + souvent quand les agents choisissent un prix, ou une qté. Alors on ne peut plus représenter le jeu sous forme normale (tableau).

On peut représenter les fcts de meilleure réponse, lorsque le gain de chaque joueur dépend non seulement de son choix mais aussi du choix d'autrui, parce qu'alors, son choix dépend de l'anticipation qu'il fait du choix d'autrui.

Deux joueurs 1 et 2 ; deux stratégies $x_1$ et $x_2$ allant de 0 à 10. On est en interaction stratégique si le gain de chacun dépend non seulement de son choix mais du choix de l'autre. Alors $x_1 = R_1 (x_2)$ et $x_2 = R_2 (x_1)$.

On peut appliquer le concept d'équilibre de Nash : intersection des fonctions de meilleure réponse, à condition qu'elle existe. Sinon, pas de NE.

### 2. Représentations graphiques des fcts de meilleure réponse quand elles se déduisent de la dérivation de la fct de gain

On suppose des fcts de meilleure réponse symétriques (hypothèse qui peut être levée). Deux possibilités :

Substituts stratégiques : $x_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} (x_\mathrm{j})$, avec $R_\mathrm{i}' (x_\mathrm{j}) < 0$ ;

Compléments stratégiques : $x_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} (x_\mathrm{j})$, $R_\mathrm{i}' (x_\mathrm{j}) > 0$.

**Exemple** (compléments stratégiques)

Choix d'investissement où $I = a_i + a_j$

Les variables sont $a_i$ et $a_j$

$G_i$ dépend positivement de $a_i$ et $a_j$, et négativement de $a_i$ (qui représente un coût pour i)

$$G_i (a_i) = a_i (c + a_j - a_i)$$

$G_i\ (a_i)$ continue dérivable.

$G_i'(a_i) = c + a_j - 2a_i$, donc la fonction de meilleure réponse de i est : $a_i = (c + a_j) / 2$.

Réciproquement, pour $j$ : $G_j\ (a_j) = a_j\ (c + a_i - a_j)$, donc $G_j'(a_j) = c + a_i - 2a_j$, donc la fonction de meilleure réponse de B est : $a_j = (c + a_i) / 2$.

Dans le quart de plan $(a_i, a_j)$, la pente des droites est inférieure à 1. Leur intersection est l'équilibre de Nash unique du jeu.

NE = $(a_i^*, a_j^*)$ tel que : $a_i^* = MR_i\ (a_j^*)$ et $a_j^* = MR_j\ (a_i^*)$.

On obtient : $a_i * = \frac{c + \frac{c + a_i *}{2}}{2}$.

⇔ $2a_i^* = 3c/2 \quad + a_i^*/2$

⇔ $a_i^* = c$

L'équilibre de Nash est $(a_i^*, a_j^*) = (c, c)$.

Représentation graphique : ai(aj) dans le plan (aj, ai) = droite : ai = c/2 à l'origine et pente = ½. Renverser dans le plan (ai, aj).

Trois remarques

i) Si les fonctions de meilleure réponse ont une pente strictement supérieure à 1, il n'existe pas d'équilibre de Nash.
ii) Si les fonctions de meilleure réponse ont une pente négative, les actions sont substituts stratégiques. Il peut exister, ou pas un équilibre de Nash.
iii) Les fonctions de meilleure réponse ne sont pas symétriques si les fonctions de gain ne le sont pas.

## 3. Quand les fcts de gain sont discontinues ou non dérivables

La détermination des fcts de meilleure réponse n'est plus possible par dérivation. On raisonne sur les différentes possibilités pour déterminer les NE. Cf. exo 1, dossier 5 : les gains de chaque joueur sont discontinus + chapitre 4 (duopole de Bertrand).