Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2023-2024
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet A

Durée : 1h30.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction

$$F_v(x, y, z) = (a - f(y), b - f(z), c - f(x))$$

   admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + f(y), y + f(z), z + f(x)) \end{aligned}$$

   est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 1, telles que $u(1) = 2, v(1) = 1$, et, pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} x + u(x) + v(x) & = 4 \\ xu(x)v(x) & = 2 \end{cases}$$

2. Donner l'équation de la tangente aux courbes représentatives des fonctions u et v au point $x = 1$.

Exercice 3 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - 1)^2 + y^2 + 3z^2 = 9\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ admet des extrema sur $\mathcal{E}$.
2. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{E}$ le(s) plus proche(s) de l'origine (pour la distance euclidienne).