Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2023-2024
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet B

Durée : 1h30.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{5}$.

1. Montrer que, pour tout $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction
$$F_v(x, y, z) = (a + f(z), b + f(x), c + f(y))$$
admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - f(z), y - f(x), z - f(y)) \end{aligned}$$
est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 1, telles que $u(0) = 0, v(0) = 1$, et, pour tout $x \in I$
$$(\star) \begin{cases} x - u(x)v(x) &= 0 \\ u(x)^2 + v(x)^2 &= 1 \end{cases}$$

2. Donner l'équation de la tangente aux courbes représentatives des fonctions u et v au point $x = 0$.

Exercice 3 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ admet des extrema sur $\mathcal{E}$.
2. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{E}$ le(s) plus loin de l'origine.