Compléments de Calcul Différentiel et Intégral

CC1 2024 - Sujet A

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction
$$F(x, y, z) = (a - f(y), b - f(z), c - f(x))$$
admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$.

(1) On va utiliser le théorème du point fixe de Picard
- $\mathbb{R}^3$ est complet
- $F_v(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ Il faut vérifier que F_v est contractante sur $\mathbb{R}^3$

On va utiliser la norme 1 sur $\mathbb{R}^3$. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on calcule

$$\begin{aligned}\|F_v(x,y,z) - F_v(x',y',z')\|_1 &= \|(a-f(y), b-f(z), c-f(x)) - (a-f(y'), b-f(z'), c-f(x'))\|_1 \\ &= \|(f(y')-f(y), f(z')-f(z), f(x')-f(x))\|_1 \\ &= |f(y')-f(y)| + |f(z')-f(z)| + |f(x')-f(x)|\end{aligned}$$

Or, par le théorème des accroissements finis, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $|f(t)-f(t')| \leq \max\limits_{c\in\mathbb{R}} |f'(c)|\,|t-t'| \leq \frac{1}{2}|t-t'|$

donc
$$\begin{aligned}\|F_v(x,y,z)-F_v(x',y',z')\|_1 &\leq \frac{1}{2}|y'-y| + \frac{1}{2}|z'-z| + \frac{1}{2}|x'-x| \\ &= \frac{1}{2}\|(x,y,z)-(x',y',z')\|_1\end{aligned}$$

$\rightarrow$ F_v est $\frac{1}{2}$-Lipschitzienne, donc contractante

D'après le théorème de Picard-Banach, F_v admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$:

$\rightsquigarrow$ Pour chaque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq
$$(a-f(y), b-f(z), c-f(x)) = (x,y,z)$$

2. Montrer que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+f(y), y+f(z), z+f(x))$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(2) On va utiliser le Théorème d'Inversion Globale : on veut donc montrer que
- φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et, $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $D\varphi(u)$ est un isomorphisme
- φ est bijective

⚠ Si on montre seulement que φ est injective, on obtiendra, par le TIG, que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^3$ dans $\varphi(\mathbb{R}^3)$
Comme on veut montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il faut aussi que $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ (càd φ surjective)

- Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, toutes les composantes de φ sont $\mathcal{C}^1$, donc φ est $\mathcal{C}^1$ et on a, pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Jac}\varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) & 0 \\ 0 & 1 & f'(z) \\ f'(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) = \begin{vmatrix} 1 & f'(y) & 0 \\ 0 & 1 & f'(z) \\ f'(x) & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{dev / à la 1ère colonne}}{=} 1\begin{vmatrix} 1 & f'(z) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + f'(x)\begin{vmatrix} f'(y) & 0 \\ 1 & f'(z) \end{vmatrix}$

$$= 1 + f'(x)f'(y)f'(z)$$

$\to$ $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) = 0 \iff f'(x)f'(y)f'(z) = -1$
Mais, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|f'(x)f'(y)f'(z)| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} < 1$
Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) \neq 0$
$\to$ $D\varphi(u)$ est un isomorphisme linéaire, donc par le théorème d'inversion locale φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo local au voisinage de chaque $u \in \mathbb{R}^3$

- Montrons que φ est bijective : soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on va montrer qu'il existe un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\varphi(x,y,z) = (a,b,c)$
Or, $\varphi(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x + f(y) = a \\ y + f(z) = b \\ z + f(x) = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - f(y) \\ y = b - f(z) \\ z = c - f(x) \end{cases}$

$\iff (x,y,z) = F_v(x,y,z) \iff (x,y,z)$ point fixe de F_v
Or, on a vu en (1) que, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, F_v a un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$
Donc v a un unique antécédent par φ : φ est bijective
$\Rightarrow$ Par le théorème d'inversion globale, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$

Exercice 2 1. Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 1, telles que $u(1) = 2, v(1) = 1$, et, pour tout $x \in I$

$$(\star) \quad \begin{cases} x + u(x) + v(x) & = 4 \\ xu(x)v(x) & = 2 \end{cases}$$

(1) On veut donc résoudre localement le système non linéaire

$$(\star) \begin{cases} x + u + v = 4 \\ xuv = 2 \end{cases}$$

en exprimant u et v en fonction de x.

→ On va utiliser le Théorème des Fonctions Implicites. On définit

$$g : (x,u,v) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+u+v-4,\ xuv-2) \in \mathbb{R}^2$$

Alors (x,u,v) est solution de $(\star)$ ssi $g(x,u,v) = 0$.

→ On veut exprimer les solutions de sous la forme $(x, u(x), v(x))$ avec x proche de 1, $u(x)$ proche de 2 et $v(x)$ proche de 1

On va donc appliquer le TFI à g au voisinage de $(1,2,1)$.

On a • $g(1,2,1) = (0,0)$

• g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car ses composantes sont polynomiales

et, $\forall (x,u,v) \in \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{Jac} g(x,u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Donc

$$\operatorname{Jac} g(1,2,1) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

matrice de $D_x g(1,2,1)$; matrice de $D_{(u,v)} g(1,2,1)$

, avec $\det D_{(u,v)} g(1,2,1) = 1 \neq 0$

Donc $D_{(u,v)} g(1,2,1)$ est un isomorphisme

→ D'après le TFI, il existe V voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$

W voisinage de $(2,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

$\varphi : V \longrightarrow W$, $x \longmapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ $\mathscr{C}^1$ sur V tels que

$$\begin{pmatrix} (x,u,v) \in V \times W \\ \text{est solution de } (\star) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x,u,v) \in V \times W \\ g(x,u,v) = (0,0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \in V \\ (u,v) = \varphi(x) \end{pmatrix}$$

Puisque V est un voisinage de 1, il existe $r > 0$ tq $]1-r, 1+r[\subset V$

Notons $I =]1-r, 1+r[$, et, $\forall x \in I$, $u(x) = \varphi_1(x)$, $v(x) = \varphi_2(x)$

Alors, comme $\begin{pmatrix} (1,2,1) \in V \times W \\ g(1,2,1) = (0,0) \end{pmatrix}$, on a $\underset{(\text{par} \Longrightarrow)}{}$ $\begin{pmatrix} 1 \in V \\ (2,1) = \varphi(1) = (u(1), v(1)) \end{pmatrix}$ Donc $\begin{cases} u(1) = 2 \\ v(1) = 1 \end{cases}$

De plus, $\forall x \in I, \left(\overset{x \in V}{(u(x),v(x)) = \varphi(x)} \right)$ donc $\underset{(\text{par } \Longleftarrow)}{}$ $g(x,u(x),v(x)) = (0,0)$

Donc $(x,u(x),v(x))$ est solution de $(*)$

$\rightarrow$ On a donc trouvé un intervalle I contenant 1 et deux fonctions $u,v : I \rightarrow \mathbb{R}$ tq $u(1)=2$, $v(1)=1$ et $\forall x \in I$, $\begin{cases} x+u(x)+v(x) = 4 \\ xu(x)v(x) = 2 \end{cases}$

2. Donner l'équation de la tangente aux courbes représentatives des fonctions u et v au point $x = 1$.

(2) Les tangentes aux courbes de u et v en 1 ont pour équation, respectivement,

$$y = u'(1)(x-1) + \underbrace{u(1)}_{=2} \quad \text{et} \quad y = v'(1)(x-1) + \underbrace{v(1)}_{=1}$$

$\rightarrow$ Il nous faut $u'(1)$ et $v'(1)$

Or $(u(x),v(x)) = \varphi(x)$, et par le TFI,

$$D\varphi(1) = - D_{(u,v)}g(1,\varphi(1))^{-1} \cdot D_x g(1,\varphi(1))$$

Donc

$$\underset{= \begin{pmatrix} u'(1) \\ v'(1) \end{pmatrix}}{\mathrm{Jac}\,\varphi(1)} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $u'(1) = 0$, $v'(1) = -1$

$\rightarrow$ L'équation de la tangente à u en 1 est $y = 0(x-1)+2 \rightsquigarrow y = 2$

et l'équation de la tangente à v en 1 est $y = -1(x-1)+1 \rightsquigarrow y = 2-x$

Exercice 3 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

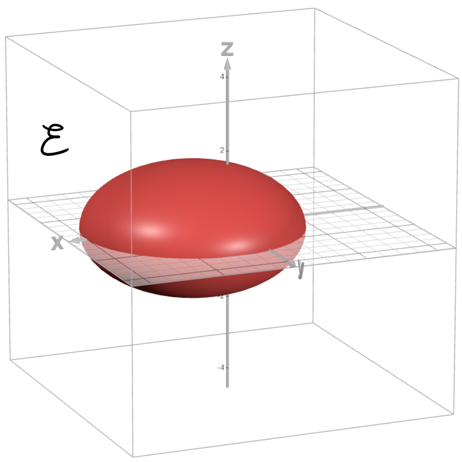
$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x-1)^2 + y^2 + 3z^2 = 9\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2+y^2+z^2$ admet des extrema sur $\mathcal{E}$.

(1) Notons $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + 3z^2 - 9$

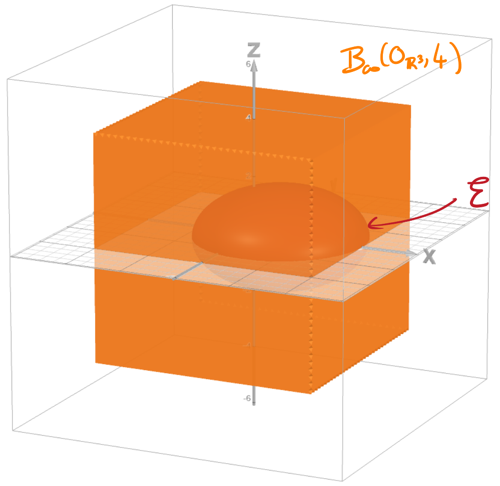
Alors g est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$

or $\mathcal{E} = \underset{\text{continue sur } \mathbb{R}^2}{g^{-1}}(\underset{\text{fermé de } \mathbb{R}}{\{0\}})$ donc $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$



$\mathcal{E}$

De plus, si $(x,y,z) \in \mathcal{E}$ alors



- $(x-1)^2 \leq (x-1)^2 + y^2 + 3z^2 \leq 9$

donc $|x-1| \leq 3$ donc $-2 \leq x \leq 4 \rightsquigarrow |x| \leq 4$

- $y^2 \leq (x-1)^2 + y^2 + 3z^2 \leq 9$

donc $|y| \leq 3$

- $3z^2 \leq (x-1)^2 + y^2 + 3z^2 \leq 9$

donc $\sqrt{3}|z| \leq 3$ donc $|z| \leq \sqrt{3}$

$(x,y,z) \in \mathcal{E} \Rightarrow \|(x,y,z)\|_\infty \leq 4$ donc $\mathcal{E}$ est borné.

$\to$ $\mathcal{E}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dim finie, donc $\mathcal{E}$ est compact

Par ailleurs, f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$

$\to$ Par le théorème de Weierstrass, $f_{|\mathcal{E}}$ admet un maximum et un minimum global.

2. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{E}$ le(s) plus proche(s) de l'origine.

(2) On cherche le(s) point(s) $u^* \in \mathcal{E}$ tq, $\forall \in E$, $\|u^* - O_{\mathbb{R}^3}\|_2 \leq \|u - O_{\mathbb{R}^3}\|_2$

càd $u^* = (x^*, y^*, z^*) \in \mathcal{E}$ tq $\forall u = (x,y,z) \in \mathcal{E}$,

$$\sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \Leftrightarrow f(u^*) \leq f(u)$$

$\to$ Il s'agit de déterminer les minima de f sur $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$: on va utiliser le théorème des extrema liés

- f et g sont des polynômes, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ 6z \end{pmatrix}$$

Donc $\nabla g(x,y,z) = O_{\mathbb{R}^3}$ ssi $(x,y,z) = (1,0,0)$, et $(1,0,0) \notin \mathcal{E}$

Donc $\forall u \in \mathcal{E}$, $\nabla g(u) \neq O_{\mathbb{R}^3}$.

Donc, si $\underset{(x,y,z)}{\overset{\shortparallel}{u}}$ est un extremum local de $f_{|\mathcal{E}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$$

ce qui donne $\begin{cases} 2x = 2\lambda x - 2\lambda \\ 2y = 2\lambda y \\ 2z = 6\lambda z \\ (x-1)^2+y^2+3z^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda-1)x = \lambda & L_1 \\ (\lambda-1)y = 0 & L_2 \\ (3\lambda-1)z = 0 & L_3 \\ (x-1)^2+y^2+3z^2=9 & L_4 \end{cases}$

L_2 donne $\lambda=1$ ou $y=0$.

Mais si $\lambda=1$, L_1 devient $0=1$: impossible. Donc $\lambda\neq 1$ et $y=0$

L_3 donne $3\lambda-1=0$ ou $z=0$

↳ $\boxed{\text{Si } 3\lambda-1=0}$ alors $\lambda=\frac{1}{3}$ et L_1 devient $-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$ donc $x=-\frac{1}{2}$

Dans ce cas L_4 donne $\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+0^2+3z^2=9$

Donc $3z^2=9-\frac{9}{4}=9.\frac{3}{4}$ donc $z^2=\frac{9}{4}$ donc $z=\pm\frac{3}{2}$

→ On trouve 2 points $u_1=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$, $u_2=\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$

↳ Si $\boxed{z=0}$ alors L_4 donne $(x-1)^2+0^2+0^2=9$ donc $x-1=\pm 3$ donc $x=-2$ ou $x=4$

→ On trouve 2 points $u_3=(-2,0,0)$ et $u_4=(4,0,0)$

On a vu en (1) que f admet des extrema globaux sur $\mathcal{E}$, donc ces extrema sont à chercher parmi les points u_1, u_2, u_3, u_4.

On calcule $f(-2,0,0)=4$ $f(4,0,0)=16$ $f\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right)=\frac{10}{4}$

Donc $f(u_1)=f(u_2)<f(u_3)<f(u_4)$

→ $u_1=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ et $u_2=\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$ sont les minima de $f|_{\mathcal{E}}$

Donc ce sont les points de $\mathcal{E}$ les plus proches de $O_{\mathbb{R}^3}$