Compléments de Calcul Différentiel et Intégral

CC1 2024 - Sujet B

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{5}$.

1. Montrer que, pour tout $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction

$$F_v(x, y, z) = (a + f(z), b + f(x), c + f(y))$$

admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$.

(1) On va utiliser le théorème du point fixe de Picard
- $\mathbb{R}^3$ est complet
- $F_v(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$

$\to$ Il faut vérifier que F_v est <u>contractante</u> sur $\mathbb{R}^3$

On va utiliser la norme 1 sur $\mathbb{R}^3$. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on calcule

$$\begin{aligned}\| F_v(x,y,z) - F_v(x',y',z')\|_1 &= \| (a+f(z), b+f(x), c+f(y)) - (a+f(z'), b+f(x'), c+f(y'))\|_1 \\ &= \| (f(z)-f(z'), f(x)-f(x'), f(y)-f(y'))\|_1 \\ &= |f(z)-f(z')| + |f(x)-f(x')| + |f(y)-f(y')|\end{aligned}$$

Or, par le théorème des accroissements finis, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $|f(t)-f(t')| \leq \max_{c \in \mathbb{R}} |f'(c)| |t-t'| \leq \frac{1}{5}|t-t'|$

Donc
$$\begin{aligned}\|F_v(x,y,z) - F_v(x',y',z')\|_1 &\leq \frac{1}{5}|z-z'| + \frac{1}{5}|x-x'| + \frac{1}{5}|y-y'| \\ &= \frac{1}{5}\|(x,y,z)-(x',y',z')\|_1\end{aligned}$$

$\to$ F_v est $\frac{1}{5}$-Lipschitzienne, donc contractante

D'après le théorème de Picard-Banach, F_v admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$:

$\leadsto$ Pour chaque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq
$$(a+f(z), b+f(x), c+f(y)) = (x,y,z)$$

2. Montrer que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x - f(z), y - f(x), z - f(y))$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(2) On va utiliser le Théorème d'Inversion Globale : on veut donc montrer que
- φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et, $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $D\varphi(u)$ est un isomorphisme
- φ est bijective

⚠ Si on montre seulement que φ est injective, on obtiendra, par le TIG, que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^3$ dans $\varphi(\mathbb{R}^3)$
Comme on veut montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il faut aussi que $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ (càd φ surjective)

- Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, toutes les composantes de φ sont $\mathcal{C}^1$, donc φ est $\mathcal{C}^1$ et on a, pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Jac}\varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -f'(z) \\ -f'(x) & 1 & 0 \\ 0 & -f'(y) & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f'(z) \\ -f'(x) & 1 & 0 \\ 0 & -f'(y) & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dev/à la 1ère colonne}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -f'(y) & 1 \end{vmatrix} - (-f'(x)) \begin{vmatrix} 0 & -f'(z) \\ -f'(y) & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 - f'(x)f'(y)f'(z)$$

$\Rightarrow$ $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) = 0 \iff f'(x)f'(y)f'(z) = 1$

Mais, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|f'(x)f'(y)f'(z)| \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125} < 1$

Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\det(\operatorname{Jac}\varphi(u)) \neq 0$

$\Rightarrow$ $D\varphi(u)$ est un isomorphisme linéaire, donc par le théorème d'inversion locale φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo local au voisinage de chaque $u \in \mathbb{R}^3$

- Montrons que φ est bijective : soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on va montrer qu'il existe un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\varphi(x,y,z) = (a,b,c)$

Or, $\varphi(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x - f(z) = a \\ y - f(x) = b \\ z - f(y) = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + f(z) \\ y = b + f(x) \\ z = c + f(y) \end{cases}$

$\iff (x,y,z) = F_v(x,y,z) \iff (x,y,z)$ point fixe de F_v

Or, on a vu en (1) que, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, F_v a un unique point fixe dans $\mathbb{R}^3$

Donc v a un unique antécédent par φ : φ est bijective

$\Rightarrow$ Par le théorème d'inversion globale, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 1, telles que $u(0) = 0, v(0) = 1$, et, pour tout $x \in I$

$$(\star)\begin{cases} x - u(x)v(x) & = 0 \\ u(x)^2 + v(x)^2 & = 1 \end{cases}$$

(1) On veut donc résoudre localement le système non linéaire

$$(\star)\begin{cases} x - uv & = 0 \\ u^2 + v^2 & = 1 \end{cases}$$

en exprimant u et v en fonction de x.

→ On va utiliser le Théorème des Fonctions Implicites. On définit

$$g : (x,u,v) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x - uv \ , \ u^2+v^2-1) \in \mathbb{R}^2$$

Alors (x,u,v) est solution de $(\star)$ ssi $g(x,u,v) = 0$.

→ On veut exprimer les solutions de sous la forme $(x, u(x), v(x))$ avec x proche de 0, $u(x)$ proche de 0 et $v(x)$ proche de 1

On va donc appliquer le TFI à g au voisinage de $(0,0,1)$.

On a • $g(0,0,1) = (0,0)$

• g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car ses composantes sont polynomiales

et, $\forall (x,u,v) \in \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{Jac} g(x,u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -v & -u \\ 0 & 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Jac} g(0,0,1) = \Bigg(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}}_{\text{matrice de } D_x g(0,0,1)} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}}}_{\text{matrice de } D_{(u,v)} g(0,0,1)} \Bigg)$, avec $\det D_{(u,v)} g(0,0,1) = -2 \neq 0$

Donc $D_{(u,v)} g(0,0,1)$ est un isomorphisme

→ D'après le TFI, il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$

W voisinage de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

$\varphi : V \longrightarrow W$, $x \longmapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\mathscr{C}^1$ sur V tels que

$$\begin{pmatrix} (x,u,v) \in V \times W \\ \text{est solution de } (\star) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x,u,v) \in V \times W \\ g(x,u,v) = (0,0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \in V \\ (u,v) = \varphi(x) \end{pmatrix}$$

Puisque V est un voisinage de 0, il existe $r > 0$ tq $]-r,+r[\subset V$

Notons $I =]-r, +r[$, et, $\forall x \in I$, $u(x) = \varphi_1(x)$, $v(x) = \varphi_2(x)$

Alors, comme $\begin{pmatrix} (0,0,1) \in V \times W \\ g(0,0,1) = (0,0) \end{pmatrix}$, on a $\underset{(\text{par} \Longrightarrow)}{}$ $\begin{pmatrix} 0 \in V \\ (0,1) = \varphi(0) = (u(0), v(0)) \end{pmatrix}$ Donc $\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$

De plus, $\forall x \in I$, $\left(\underset{x\in V}{(u(x), v(x)) = \varphi(x)} \right)$ donc (par $\Longleftarrow$) $g(x, u(x), v(x)) = (0,0)$

donc $(x, u(x), v(x))$ est solution de $(*)$

→ On a donc trouvé un intervalle I contenant 0 et deux fonctions $u, v : I \to \mathbb{R}$ tq $u(0) = 0$, $v(0) = 1$ et $\forall x \in I$, $\begin{cases} x - u(x)v(x) = 0 \\ u^2(x) + v^2(x) = 1 \end{cases}$

2. Donner l'équation de la tangente aux courbes représentatives des fonctions u et v au point $x = 0$.

(2) Les tangentes aux courbes de u et v en 0 ont pour équation, respectivement,

$$y = u'(0)(x-0) + \underbrace{u(0)}_{=0} \quad \text{et} \quad y = v'(0)(x-0) + \underbrace{v(0)}_{=1}$$

→ Il nous faut $u'(0)$ et $v'(0)$

Or $(u(x), v(x)) = \varphi(x)$, et par le TFI,

$$D\varphi(0) = - D_{(u,v)}g\,(0, \varphi(0))^{-1} \cdot D_x g(0, \varphi(0))$$

Donc

$$\underset{\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}}{\text{Jac}\,\varphi(0)} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u'(0) = 1$, $v'(0) = 0$

→ L'équation de la tangente à u en 0 est $y = 1(x-0) + 0 \rightsquigarrow y = x$

et l'équation de la tangente à v en 0 est $y = 0(x-0) + 1 \rightsquigarrow y = 1$

Exercice 3 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

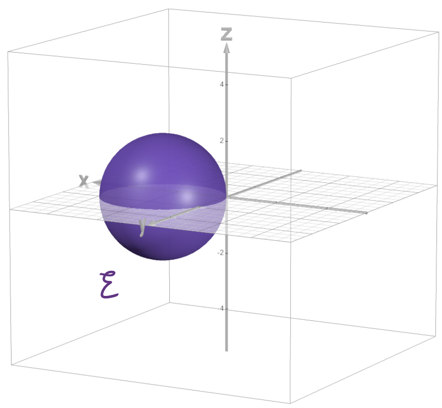
$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ admet des extrema sur $\mathcal{E}$.

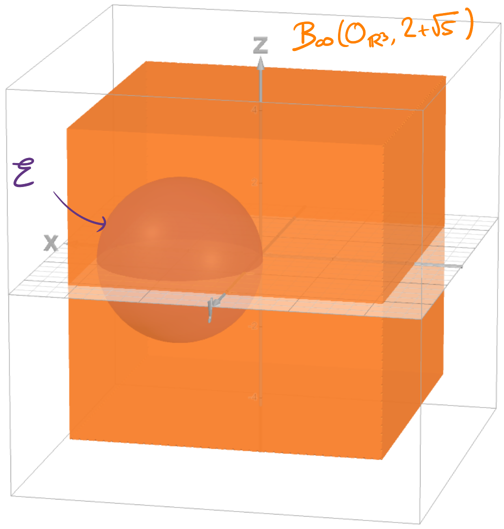
(1) Notons $g(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 5$

Alors g est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$

or $\mathcal{E} = \underset{\text{continue sur } \mathbb{R}^2}{g^{-1}}(\underset{\text{fermé de } \mathbb{R}}{\{0\}})$ donc $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$



$\mathcal{E}$



De plus, si $(x,y,z)\in\mathcal{E}$ alors

- $(x-2)^2 \leq (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 5$

Donc $|x-2| \leq \sqrt{5}$ donc $2-\sqrt{5} \leq x \leq 2+\sqrt{5}$

$\rightarrow$ $|x| \leq 2+\sqrt{5}$

- $(y-1)^2 \leq (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 5$

Donc $|y-1| \leq \sqrt{5}$ donc $1-\sqrt{5} \leq y \leq 1+\sqrt{5}$

$\rightarrow$ $|y| \leq 1+\sqrt{5}$

- $z^2 \leq (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 5$ donc $|z| \leq \sqrt{5}$

Donc si $(x,y,z)\in\mathcal{E}$, $\|(x,y,z)\|_\infty \leq 2+\sqrt{5}$ donc $\mathcal{E}$ est borné.

$\rightarrow$ $\mathcal{E}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dim finie, donc $\mathcal{E}$ est compact

Par ailleurs, f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ Par le théorème de Weierstrass, $f_{|\mathcal{E}}$ admet un maximum et un minimum global.

2. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{E}$ le(s) plus loin de l'origine.

(2) On cherche le(s) point(s) $u^*\in\mathcal{E}$ tq, $\forall \in E$, $\|u^*-O_{\mathbb{R}^3}\|_2 \geq \|u-O_{\mathbb{R}^3}\|_2$

càd $u^* = (x^*,y^*,z^*)\in\mathcal{E}$ tq $\forall u=(x,y,z)\in\mathcal{E}$,

$$\sqrt{x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}} \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\iff x^{*2}+y^{*2}+z^{*2} \geq x^2+y^2+z^2 \iff f(u^*) \geq f(u)$$

$\rightarrow$ Il s'agit de déterminer les maxima de f sur $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$: on va utiliser le théorème des extrema liés

- f et g sont des polynômes, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 2y-2 \\ 2z \end{pmatrix}$$

Donc $\nabla g(x,y,z) = O_{\mathbb{R}^3}$ ssi $(x,y,z) = (2,1,0)$, et $(2,1,0)\notin\mathcal{E}$

Donc $\forall u\in\mathcal{E}$, $\nabla g(u) \neq O_{\mathbb{R}^3}$.

Donc, si $\underset{(x,y,z)}{\overset{\shortparallel}{u}}$ est un extremum local de $f_{|\mathcal{E}}$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tq

$$\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$$

ce qui donne $\begin{cases} 2x = 2\lambda x - 4\lambda \\ 2y = 2\lambda y - 2\lambda \\ 2z = 2\lambda z \\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda-1)x = 2\lambda & L_1 \\ (\lambda-1)y = \lambda & L_2 \\ (\lambda-1)z = 0 & L_3 \\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 5 & L_4 \end{cases}$

(L_3) donne $\lambda = 1$ ou $z=0$

Mais si $\lambda=1$ (L_1) devient $0=2$: impossible. Donc $\lambda \neq 1$ et $z=0$

Avec (L_1) on trouve $x = \dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$ et avec (L_2), $y = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$

De là, (L_4) donne

$$\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1} - 2\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} - 1\right)^2 + 0^2 = 5$$

$$\iff \left(\frac{2\lambda-2\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 = 5 \iff \frac{4}{(\lambda-1)^2} + \frac{1}{(\lambda-1)^2} = 5 \iff \frac{5}{(\lambda-1)^2} = 5$$

$$\iff (\lambda-1)^2 = 1 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 1 \iff \lambda(\lambda-2) = 0$$

Donc soit $\lambda = 0$ et dans ce cas $x=0$, $y=0$

soit $\lambda = 2$ et dans ce cas $x=4$, $y=2$

On trouve donc 2 points : $M_1 = (0,0,0)$ et $M_2 = (4,2,0)$

On a vu en (1) que f admet des extrema globaux sur $\mathcal{E}$, donc ces extrema sont à chercher parmi les points M_1, M_2

On calcule $f(M_1) = f(0,0,0) = 0$, $f(M_2) = f(4,2,0) = 20$

Donc $f(M_1) < f(M_2)$

$\longrightarrow$ $M_2 = (4,2,0)$ est le maximum de $f_{|\mathcal{E}}$, donc c'est le point de $\mathcal{E}$ le plus loin de l'origine