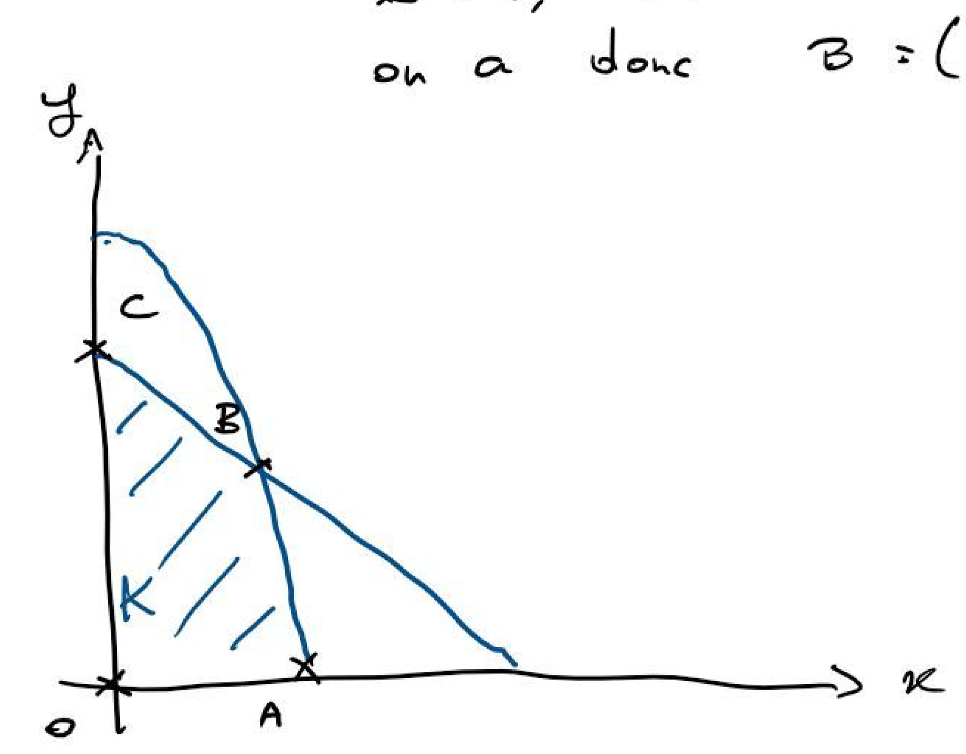
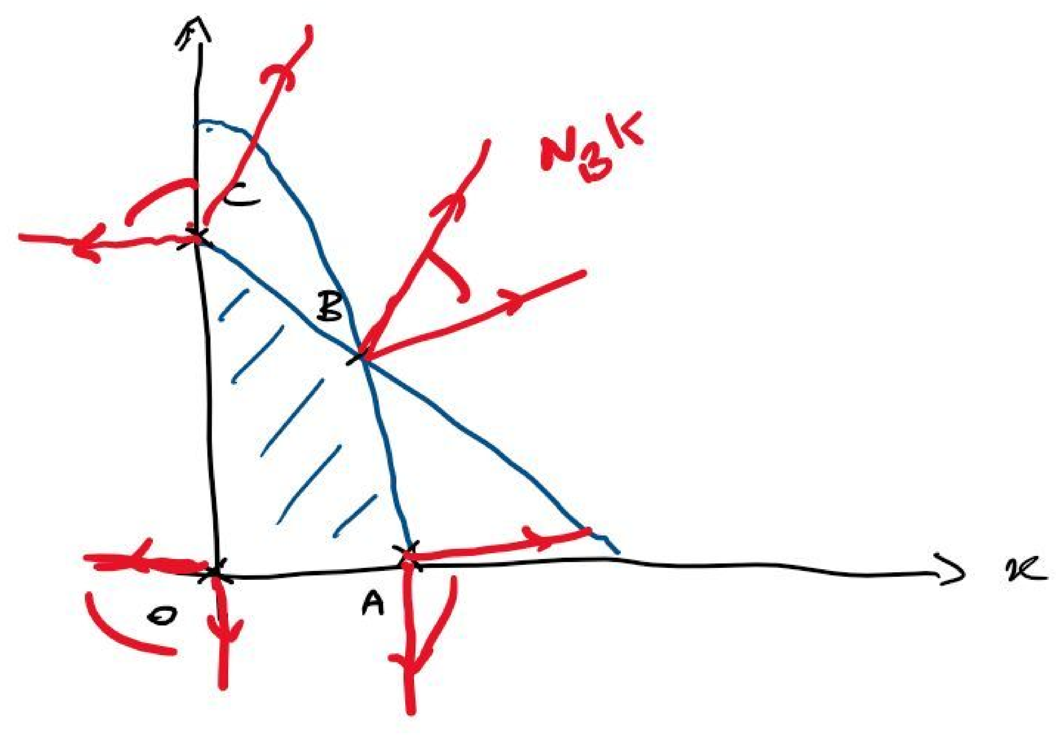
a) $y = 4 - 2x^2$ est une parabole de sommet $(0,4)$
Elle rencontre la droite $x + y = 3$ en un point B tel que
$3 - x = 4 - 2x^2$, cad $2x^2 - x - 1 = 0$
$\Delta = 9$, les racines sont $\frac{1 \pm 3}{4}$
on a donc $B = (1, 2)$



Les autres points saturant deux contraintes sont
$O = (0,0)$, $A = (\sqrt{2}, 0)$ et $C = (0,3)$

b)



si $g_1(x,y) = 2x^2 + y - 4$ et $g_2(x,y) = x + y - 3$
$\forall X$, $\nabla g_1(X) = \left|\begin{matrix}4x\\1\end{matrix}\right.$
donc $\nabla g_1(A) = \left|\begin{matrix}4\sqrt{2}\\1\end{matrix}\right.$
$\nabla g_1(B) = \left|\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$
et $\forall X$, $\nabla g_2(X) = \left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$

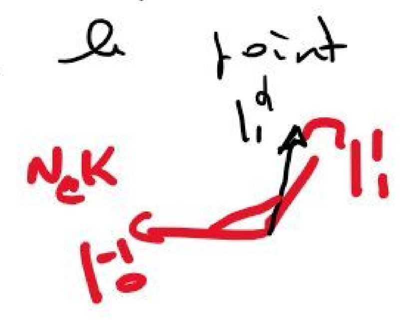
c) * Toutes les contraintes sont des inégalités larges avec des fonctions continues donc le domaine est fermé
Le domaine est borné puisque $\forall X \in K$, $0 \le x \le x + y \le 3$
et $0 \le y \le x + y \le 3$
La fonction objectif est continue.
On a donc les trois conditions qui assurent l'existence d'une so.

* La fonction $g_1 : (x,y) \mapsto 2x^2 + y - 4$ est convexe comme "somme directe" des fonctions convexes $x \mapsto 2x^2$ et $y \mapsto y - 4$
Les trois autres contraintes sont affines donc convexes
Le domaine K est donc convexe
La fonction objectif est affine donc concave
Le programme est donc convexe.

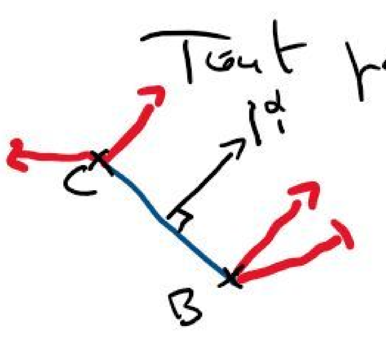
d) $\forall x$, $\nabla f(x) = \left|\begin{matrix}\alpha\\1\end{matrix}\right. \neq 0$ donc pas de so intérieure
Et, comme $\alpha > 0$, $\nabla f(x)$ pointe partout dans l'orthant strictement positif $\left\{ \left|\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\right. / \ p > 0 \text{ et } q > 0 \right\}$
Au vu des cônes normaux, la so doit se trouver sur la frontière "Nord-Est" du domaine

e) Quand α augmente le gradient de f, égal à $\left|\begin{matrix}\alpha\\1\end{matrix}\right.$ en tout point, devient de plus en plus horizontal, on s'attend à ce que la so "descende" le long de la frontière NE du point C jusqu'au point A. Reste à vérifier les valeurs critiques de α.

i) Cas $\alpha < 1$
$\forall x$, $\nabla f(x) = \left|\begin{matrix}\alpha\\1\end{matrix}\right.$ fait un angle $>$ à $45°$ avec l'horizontale, seul le point $C = (0,3)$ satisfait la CN1 $\nabla f(x) \in N_x K$



ii) Cas $\alpha = 1$ Tout point du segment $[B,C]$ est so



iii) Cas $1 < \alpha \le 4$
Au point $B = (1,2)$, $\nabla g_1(B) = \left|\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$ et $\nabla g_2(B) = \left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$
Le vecteur $\nabla f(B) = \left|\begin{matrix}\alpha\\1\end{matrix}\right.$ est bien "entre" les deux gradients des contraintes saturées, cad dans le cône normal. B est alors so.

iv) Cas $4 < \alpha < 4\sqrt{2}$
Au point $A = (\sqrt{2}, 0)$, $\nabla g_1(A) = \left|\begin{matrix}4\sqrt{2}\\0\end{matrix}\right.$
On se trouve donc dans le cas où la so va être sur la parabole entre B et A strictement, en un tel point la seule contrainte saturée est g_1 donc la CN1 d'optimalité va s'écrire
$$\nabla f(X) \in N_X K = \mathbb{R}_+ \nabla g_1(B) = \left\{ \lambda \left|\begin{matrix}4x\\1\end{matrix}\right. / \ \lambda \geqslant 0 \right\}$$
On doit donc résoudre $\begin{cases} \alpha = 4\lambda x \\ 1 = \lambda \\ 2x^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$

D'où il vient facilement $x^* = \frac{\alpha}{4}$, $y^* = 4 - \frac{\alpha^2}{8}$

v) Cas $4\sqrt{2} \le \alpha$
Puisque $\nabla g_1(A) = \left|\begin{matrix}4\sqrt{2}\\1\end{matrix}\right.$, α est maintenant suffisamment grand pour que A soit la so