Chapitre IV-1 - ESPACES $\mathcal{L}^p(\mu)$

Où l'intégration rejoint la topologie, et ça μ-presque marche

Introduction

La modélisation mathématique, c'est l'art de ramener une question qui se pose dans le monde réel à une équation ou un problème d'optimisation. On a vu la puissance du calcul différentiel pour répondre à ce genre de questions.

Parlons maintenant d'un autre type de problèmes de modélisation : ceux dont les solutions recherchées sont des fonctions.

$\rightsquigarrow$ Par exemple, la température $u(x,t)$ à la position x et à l'instant t se diffuse suivant *l'équation de la chaleur* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et il s'agit de trouver u.

Une méthode efficace, pour répondre à ce genre de questions, fait appel à la *topologie* des espaces vectoriels normés de fonctions. Ces espaces vectoriels sont de dimension infinie, donc toutes les normes n'y sont pas équivalentes : il s'agit donc aussi de choisir "la bonne norme" pour étudier un problème donné.

- Pour quel choix de norme N sur les espaces vectoriels $\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ l'application linéaire

$$D : u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \mapsto \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$$

  est-elle continue ?

- Quelles sont les valeurs propres de l'application linéaire $u \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$? Peut-on décomposer toute fonction comme somme de vecteurs propres ?

- L'e.v.n. $(\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), N)$ est-il complet ?

  $\rightsquigarrow$ Peut-on utiliser le théorème du point fixe ?

- Peut-on montrer que l'ensemble des solutions admissibles est compact ? Peut-on trouver une suite d'approximations qui converge vers la "vraie" solution ?

$\rightsquigarrow$ D'où l'intérêt aussi de disposer d'un vaste choix de normes !

1 Espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$

On fixe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. On va introduire une famille de normes sur des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}, \mathbb{R})$, paramétrées par $p \in [1, +\infty[$:

Définition 1

Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}, \mathbb{R}), \int_X^* |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

et, pour $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, on pose

$$N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 2

$\mathcal{L}^1(\mu)$ est donc l'ensemble des fonctions μ-intégrables $\mathcal{L}^1((X, \mathscr{T}, \mu); \mathbb{R})$.

Exemple : Pour $(X, \mathscr{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ l'ensemble des entiers munis de la mesure de comptage, on a

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}$$

On note cet ensemble ℓ^p.

Exemple : Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x)$

$\rightsquigarrow$ Pour quels $p \geq 1$ a-t-on $f_\alpha \in \mathscr{L}^p(\lambda_1)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

Proposition 3

Pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel.

Preuve : On montre que $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R})$.

1. La fonction nulle vérifie bien $\displaystyle\int_X^* |0|^p d\mu = 0 < \infty$, donc elle appartient à $\mathcal{L}^p(\mu)$.
2. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_X^* |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_X^* |f|^p d\mu < \infty$, donc $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, montrons que $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

   Remarquons que, pour tout $x \in X$, puisque $t \mapsto t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

   $$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p$$

   Et mieux que ça, $t \mapsto t^p$ est *convexe* sur $\mathbb{R}^+$ donc, pour tous $a, b \geq 0$,

   $$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2} a^p + \frac{1}{2} b^p \text{ i.e. } (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

   donc, pour tout $x \in X$

   $$(|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

   d'où finalement

   $$\int_X^* |f+g|^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_X^* |f|^p d\mu + \int_X^* |g|^p d\mu \right) < \infty$$

   donc $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. □

$\rightsquigarrow$ On s'attend à ce que N_p définisse une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$. Vérifions si c'est le cas :

(N1) On a, pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$

(N2) Il faut montrer que $N_p(f) = 0$ ssi $f = 0_{\mathcal{L}^p(\mu)}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$, $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$? ...on y reviendra dans un instant.

(N3) Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $N_p(\lambda f) = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| N_p(f)$.

(N4) **Inégalité triangulaire**

Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Il s'agit de montrer que $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

$\rightsquigarrow$ Pour cela, il va nous falloir quelques résultats intermédiaires.

Un cas particulier qu'on connaît déjà : $p = 2$.

Dans le cas où $p = 2$, on a

$$N_2(f+g)^2 = \int_X^* |f+g|^2 d\mu \leq \int_X^* |f|^2 + 2|fg| + |g|^2 d\mu = \int_X^* |f|^2 d\mu + 2\int_X^* |fg| d\mu + \int_X^* |g|^2 d\mu$$

et on dispose de l'*inégalité de Cauchy-Schwartz* :

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = N_2(f) N_2(g)$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} N_2(f+g)^2 = \int_X^* |f+g|^2 d\mu &= \int_X^* |f|^2 d\mu + 2\int_X^* |fg| d\mu + \int_X^* |g|^2 d\mu \\ &\leq N_2(f)^2 + 2N_2(f)N_2(g) + N_2(g)^2 = (N_2(f) + N_2(g))^2 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)}$.

Pour passer à un $p \geq 1$ quelconque, on va démontrer une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : *l'inégalité de Hölder.*

Définition 4

On dit que $p, q \in [1, +\infty[$ sont des exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si $p > 1$, l'exposant conjugué de p est $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Par exemple, $p = 2, q = 2$ sont conjugués, ainsi que $p = 4, q = \dfrac{4}{3}$.

Proposition 5 (*Inégalité de Hölder*)

Soient p, q deux exposants conjugués, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Autrement dit, $N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g)$.

Preuve : On va utiliser l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Young* :

$$\boxed{\forall a, b \geq 0,\ \ ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,\ \text{ avec égalité ssi } a^p = b^q}$$

> *Preuve de l'inégalité de Young :* Si $a = 0$ ou $b = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$ et notons $x = p\ln(a)$ (donc $a = e^{\frac{x}{p}}$) et $y = q\ln(b)$ (donc $b = e^{\frac{y}{q}}$). Alors, puisque la fonction exp est convexe, on a
>
> $$\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y$$
>
> Or, $\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab$, $e^x = a^p$, et $e^y = b^q$. □

Passons maintenant à l'inégalité de Hölder.

Si $f = 0$ μ-p.p (ou $g = 0$ μ-p.p), alors $fg = 0$ μ-p.p et l'inégalité est vérifiée.

Sinon, $N_p(f) > 0$ et $N_q(g) > 0$ et on peut poser, pour tout $x \in X$,

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{N_p(f)},\ \ G(x) = \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$$

Alors $F \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $G \in L^q(\mu)$ et, par Young, on a pour tout $x \in X$

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q \quad \text{ i.e.}$$
$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}\frac{1}{N_p(f)^p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{N_q(g)^q}|g(x)|^q$$

On obtient que fg est intégrable (autrement dit $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$) et en intégrant sur X, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\int_X |f(x)g(x)|d\mu &\leq \frac{1}{p}\frac{1}{N_p(f)^p}\int_X |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{N_q(g)^q}\int_X |g(x)|^q d\mu \\
&\leq \frac{1}{p}\frac{1}{N_p(f)^p}N_p(f)^p + \frac{1}{q}\frac{1}{N_q(g)^q}N_q(g)^q \\
&\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

et on obtient Hölder en multipliant cette dernière inégalité par $N_p(f)N_q(g)$. □

De là, on peut démontrer l'inégalité triangulaire pour N_p, appelée dans ce cas *inégalité de Minkowski.*

Proposition 6 (*Inégalité de Minkowski*)

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

Preuve :

- Pour $p = 1$, c'est une conséquence de l'inégalité triangulaire classique $|f + g| \leq |f| + |g|$, et de la croissance de l'intégrale.

- Pour $p > 1$, posons $q = \dfrac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué. On a

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p = |f|(|f|+|g|)^{p-1} + |g|(|f|+|g|)^{p-1}.$$

Posons $h = (|f|+|g|)^{p-1}$. Alors $h \in \mathcal{L}^q(\mu)$: h est mesurable positive et

$$\int_X^* h^q d\mu = \int_X^* (|f|+|g|)^{q(p-1)} d\mu = \int_X^* (|f|+|g|)^p d\mu < \infty$$

car $|f|, |g| \in \mathcal{L}^p(\mu)$, donc $|f|+|g|$ aussi puisque $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel. De plus,

$$N_q(h) = N_p(|f|+|g|)^{\frac{p}{q}} = N_p(|f|+|g|)^{p-1}$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder à $|f|$ et h d'une part, à $|g|$ et h d'autre part :

$$\int_X |f| h d\mu \leq N_p(f) N_q(h) = N_p(f) N_p(|f|+|g|)^{p-1}$$
$$\int_X |g| h d\mu \leq N_p(g) N_q(h) = N_p(g) N_p(|f|+|g|)^{p-1}$$

donc

$$N_p(|f|+|g|)^p = \int_X (|f|+|g|)^p d\mu \leq N_p(|f|+|g|)^{p-1}(N_p(f)+N_p(g)) \text{ donc}$$
$$N_p(|f|+|g|) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

et on conclut en observant que $N_p(f+g) \leq N_p(|f|+|g|)$. □

Alors, N_p est une norme ?
⇝ Il nous manque encore la propriété **(N2)** des normes : $N_p(f) = 0$ ssi $f = 0_{\mathcal{L}^p(\mu)}$.

Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Supposons que $N_p(f) = 0$. Alors $|f|^p$ est une fonction mesurable positive sur $(X, \mathcal{T})$ dont l'intégrale est nulle. Donc $f = 0$ sur X...μ-p.p..

Donc, s'il existe un ensemble N non vide et μ-négligeable, alors son indicatrice $f = \mathbb{1}_N$ est dans $\mathcal{L}^p(\mu)$, $N_p(f) = 0$ mais $f \neq 0_{\mathcal{L}^p(\mu)}$. Donc, dans ce cas, N_p ne définit pas une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Donc, si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sont égales μ-p.p., $N_p(f-g) = 0$: la "distance" entre f et g est nulle, ou encore, N_p ne voit pas la différence entre f et g.
On a seulement :

> Pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel et $N_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}^+$ vérifie
>
> - Si $f = 0_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ alors $N_p(f) = 0$
> - Pour tous $f \in L^p(\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f)$
> - Pour toutes $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.
>
> ⇝ On dit que N_p est une semi-norme sur $L^p(\mu)$.

⇝ Tout dépend de l'existence de fonctions non nulles, mais nulles μ-presque partout.

Exemple : On considère $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ l'ensemble des entiers muni de la mesure de comptage.

1. Montrer que si A est μ-négligeable alors $A = \varnothing$.
2. En déduire que, pour tout $p \geq 1$,

$$\ell^p = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}$$

   muni de $\|(u_n)_n\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}}$ est un espace vectoriel normé.

Mais dans un des cas qui nous intéresse le plus, $(I, \mathscr{B}(I))$ muni de la mesure de Lebesgue λ, le problème se pose :

Exercice : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $p \geq 1$.
Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{L}^p(\lambda_1)$ telle que f n'est pas la fonction nulle sur I, mais $N_p(f) = 0$.

Chapitre IV-2 - ESPACES $L^p(\mu)$

Où on redresse $\mathcal{L}$, afin qu'il soit moins nul

2 Espaces de "fonctions" $L^p(\mu)$

Pour contourner le problème, on va tricher. Au lieu de travailler avec des fonctions proprement dites, on va introduire un espace vectoriel dont les éléments sont des *ensembles* de fonctions.

Définition 7

Soit $p \geq 1$. Pour chaque $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on définit

$$[f] = \{h \in \mathcal{L}^p(\mu),\ f = h\ \mu\text{-p.p.}\}$$

On note $L^p(\mu) = \{[f],\ f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$.

Rigoureusement parlant, $[f]$ est la *classe d'équivalence* de f par rapport à la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ par

$$f \sim g \iff f = g\ \mu\text{-p.p. sur} X$$

et $L^p(\mu)$ est alors l'ensemble *quotient* $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ par cette relation.

Exercice : Sur $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda_1)$, on considère la fonction f définie par

$$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est borélienne, puis que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ pour tout $p \geq 1$.
2. Trouver un représentant continu de $[f]$.
3. Trouver une fonction g dans $\mathcal{L}^p(\mu)$ telle que $[g]$ n'admet pas de représentant continu.

On va définir une addition et une multiplication scalaire sur $L^p(\mu)$, qui en feront un espace vectoriel. Mais du coup, il faut préciser ce qu'on entend par la somme de deux classes de fonctions, et comment multiplier une classe de fonctions par 37.6.

Si $\alpha = [f]$ et $\beta = [g]$ sont deux éléments de $L^p(\mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, et il semble raisonnable de poser $\alpha + \beta := [f + g]$.

⚠ Mais, et si $\tilde{f} \in \alpha$, $\tilde{g} \in \beta$, alors $\alpha = [f] = [\tilde{f}], \beta = [g] = [\tilde{g}]$

$$\alpha + \beta = \begin{cases} [f+g] \text{ ?} \\ \text{ou} \\ [\tilde{f} + \tilde{g}] \text{ ?} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Dans ce cas on a $[f + g] = [\tilde{f} + \tilde{g}]$ (Montrez-le !), donc tout va bien !

Proposition 8

L'opération $([f],[g]) \in L^p(\mu) \times L^p(\mu) \mapsto [f + g] \in L^p(\mu)$ est bien définie.

De la même façon, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in L^p(\mu)$, alors pour $f \in \alpha$, on a $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et il semble raisonnable de poser

$$\lambda\alpha = \lambda[f] := [\lambda f]$$

Mais à nouveau, si $\tilde{f} \in \alpha$ est un autre représentant, on a apparemment (au moins) deux possibilités :

$$\lambda \cdot \alpha = [\lambda f] \text{ ou } \lambda \cdot \alpha = [\lambda \tilde{f}] \text{ ?}$$

On peut donc noter $\lambda\alpha = [\lambda f]$.

$\rightsquigarrow$ En fait, dans ce cas, $[\lambda f] = [\lambda \tilde{f}]$, donc ces deux possiblités sont la même !

Proposition 9

L'opération $(\lambda, [f]) \in \mathbb{R} \times L^p(\mu) \mapsto [\lambda f] \in L^p(\mu)$ est bien définie.

Proposition 10

Muni des opérations

- $([f], [g]) \in L^p(\mu) \times L^p(\mu) \mapsto [f + g] \in L^p(\mu)$
- $(\lambda, [f]) \in \mathbb{R} \times L^p(\mu) \mapsto [\lambda f] \in L^p(\mu)$

l'ensemble $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel. Son vecteur nul est

$$[0] = \{z \in \mathcal{L}^p(\mu), z = 0 \ \mu\text{-p.p. sur} X\}$$

Mieux encore,

Proposition 11

L'opération

$$[f] \in L^p(\mu) \mapsto \|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+$$

est aussi bien définie (autrement dit la valeur de $\|[f]\|_p$ ne dépend pas du représentant de $[f]$ choisi) et est une norme sur $L^p(\mu)$.

ce qui résoud notre problème initial.

Souvent, par abus de langage, on parlera de "fonction" $f \in L^p(\mu)$, bien que les éléments de $L^p(\mu)$ ne soient, techniquement, pas des fonctions.
Le prix qu'on paie, c'est qu'on ne peut pas calculer la valeur en un point $x_0 \in X$ d'une "fonction" $f \in L^p(\mu)$. Contrairement à la somme, à la multiplication scalaire et à la norme, l'opération *d'évaluation* :

$$ev_{x_0} : [f] \in L^p(\mu) \mapsto f(x_0)$$

n'est pas bien définie.

> **Exemple :** Reprenons la fonction
>
> $$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$
>
> On aurait donc, a priori, $ev_1([f]) = f(1) = 3$. Mais on a vu que la fonction $\tilde{f} : x \in [0,1] \mapsto x^2$ est aussi un représentant de $[f]$, donc on aurait aussi $ev_1([f]) = \tilde{f}(1) = 1$. Or, il semble que $1 \neq 3$...

Cela dit, ce n'est pas leur valeur en des points spécifiques qui nous intéressent dans ces fonctions (en probabilités et statistiques par exemple, la plupart des opérations intéressantes font intervenir des intégrales, et donc peu importe le représentant choisi). Il faut simplement garder en tête, lorqu'on parle de "fonction" L^p, qu'on est aussi myope que la mesure μ et qu'on ne voit pas la différence entre deux fonctions égales presque partout.

Théorème 12 (*Riesz-Fischer*)

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace vectoriel normé $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est complet.

Remarque 13

Si on avait utilisé l'intégrale de Riemann, l'ensemble $L^p(\mu)$ n'aurait pas été complet : c'est un des grands avantages de l'intégrale de Lebesgue (et c'est pour ça qu'on donne son nom à ces e.v.n.)

Il va donc s'agir de montrer que si une suite $(f_n)_n$ de "fonctions" de $L^p(\mu)$ est de Cauchy, alors elle converge vers une "fonction" $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Il est important de distinguer deux convergences : la convergence dans $L^p(\mu)$ et la convergence simple (μ-p.p.) :

- On dit qu'une suite $(f_n)_n \in (L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$ (ou "en norme $L^p(\mu)$") si
$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ i.e. } \int_X |fn - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
- $(f_n)_n$ converge simplement vers f μ-p.p. si $\mu(\{x \in X,\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$

Exercice :

1. Vérifier que $A = \{x \in X,\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \in \mathscr{T}$
Indice : $x \in A \iff \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}$.
2. Montrer que la convergence simple μ-p.p. ne dépend pas du choix des représentants de $[f_n]$ et $[f]$ (autrement dit, elle a un sens sur $L^p(\mu)$).

$\rightsquigarrow$ Ces deux modes de convergence sont différents !

Contre-exemple 1 : La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0,1]$ par $f_n = n^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ converge simplement vers la fonction nulle μ-p.p. sur $[0,1]$ mais pas dans $L^p([0,1])$.

Contre-exemple 2 : Considérons la suite de fonctions donnée par [a]

$$f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}, \quad f_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}, f_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}, \quad f_4 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}, f_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, f_6 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, f_7 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]},$$

et plus généralement, en définissant $k = \lceil \log_2(n) \rceil$ et $j = n - 2^k$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{j}{2^k} \leq x \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $L^p(\mu)$ quel que soit $p \geq 1$, mais, quel que soit $x \in [0,1]$, $f_n(x) \nrightarrow 0$.

a. voir ici : `https://www.math3ma.com/blog/on-constructing-functions-part-6`

Preuve du théorème de Riesz-Fisher
Soit $(f_n)_n \in L^p(\mu)$ une suite de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $q \geq p \geq N$,

$$\|f_q - f_p\|_p < \varepsilon$$

En utilisant ceci avec $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, on construit par récurrence une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\psi(n+1)} - f_{\psi(n)}\|_p < \frac{1}{2^n}$$

On définit une nouvelle suite de fonctions sur X par

$$g_n : x \in X \mapsto \sum_{k=0}^{n} |f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)| \in \mathbb{R}$$

ainsi que

$$g : x \in X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)| \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L^p(\mu)$ et, plus précisément, par l'inégalité de Minkowski, on a, pour tout n,

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_{\psi(k+1)} - f_{\psi(k)}\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 2$$

De plus, $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, et, pour tout $x \in X$, $g_n(x) \to g(x)$. Donc, par le théorème de convergence monotone,

$$\int^* g^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X^* g_n^p \, d\mu \leq 2^p < \infty$$

$\rightsquigarrow$ g^p est intégrable, en particulier g^p est finie μ-p.p. sur X, et donc g aussi.

Autrement dit, pour presque tout $x \in X$, la série de t.g. $(f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(n)}(x))_n$ converge absolument, donc converge.
Or, pour un tel x, la suite des sommes partielles de cette série est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)) = f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(0)}(x)$$

donc, si on pose $f(x) = f_{\psi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x))$, on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x)$$

Définissons donc la fonction f sur X tout entier par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si la série de t.g. } (f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(n)}(x))_n \text{ ne converge pas} \\ f_{\psi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{\psi(n)} \to f$ presque partout sur X, et pour tout x,

$$|f_{\psi(n)}(x)|^p \leq |f_{\psi(0)}(x) + g(x)|^p$$

or $|f_{\psi(0)} + g|^p$ est intégrable puisque $f_{\psi(0)}, g \in L^p$, donc par le théorème de convergence dominée, $|f|^p$ est in tégrable sur X, autrement dit $f \in L^p(\mu)$.

Enfin,

$$\begin{cases} |f_{\psi(n)}(x) - f(x)| \to 0 \ \mu - p.p. \\ |f_{\psi(n)}(x) - f(x)|^p \leq (|f_{\psi(0)}(x) - f(x)| + g(x))^p \quad \text{pour tout } x \in X \end{cases}$$

avec $(|f_{\psi(0)}(x) - f(x)| + g(x))^p$ intégrable puisque $f_{\psi(0)}, f, g \in L^p(\mu)$, donc, toujours par le théorème de convergence monotone,

$$\int_X |f_{\psi(n)} - f|^p d\mu \to 0 \text{ i.e. } \|f_{\psi(n)} - f\|_p \to 0$$

$\rightsquigarrow$ La sous-suite $(f_{\psi(n)})_n$ converge dans $L^p(\mu)$.
Puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy, ceci suffit à montrer que $(f_n)_n$ converge dans $L^p(\mu)$. $\square$

Dans la foulée, on obtient un résultat qui lie convergence μ-p.p. et convergence L^p :

Théorème 14

Soit $(f_n)_n \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers f dans $L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_n$ et une fonction $g \in L^p(\mu)$ telles que

- *$(f_{\phi(n)})_n$ converge simplement vers f μ-p.p. sur X,*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{\phi(n)}| \leq g$.*

Application :

Soient $r, s \geq 1$ et $g \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que

$$\exists c \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, |g(y)| \leq c|y|^{\frac{r}{s}}$$

On s'en sert pour définir

$$\Phi : f \in L^r(\mu) \mapsto g \circ f \in L^s(\mu)$$

- Montrer que Φ est bien définie et vérifie

$$\forall f \in L^r(\mu), \|\Phi(f)\|_s \leq c\|f\|_p$$

- *Question piège :* Peut-on en déduire directement que Φ est continue sur $L^r(\mu)$?

  $\rightsquigarrow$ On va donc en déduire *indirectement* que Φ est continue.

On va utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $f \in L^r(\mu)$, et $(f_n)_n \in L^r(\mu)^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers f dans $(L^r(\mu), \|.\|_r)$.

- Montrer que la suite réelle $(a_n)_n$ définie par $a_n = \|\Phi(f_n) - \Phi(f)\|_s$ est bornée, et en déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\alpha}(n) \to \ell$.
- Montrer qu'il existe $h \in L^r(\mu)$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ encore plus strictement croissante telles que :
  - $f_{\phi(n)} \to f \ \mu - p.p.$
  - $|f_{\phi(n)}| \leq h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
  - $\ell = \lim_{n\to\infty} \|\Phi(f_{\phi(n)})_\Phi(f_{\phi(n)})\|$.
- Montrer que $\Phi(f_{\phi(n)}) \to \Phi(f)$ μ-p.p. et que

$$|\Phi(f_{\phi(n)}(x) - \Phi(f)(x)|^s \leq c2^s|h|^r$$

- En déduire que $(\Phi(f_{\phi(n)}))_n$ converge vers $\Phi(f)$ dans $L^s(\mu)$, et de là, en déduire la valeur de ℓ.
- Montrer que $a_n \to 0$ et conclure.