Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments d'analyse

Feuille 5 : Fonctions $\mathscr{L}^p$, Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p

1 Fonctions $\mathscr{L}^p$

Exercice 1 On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Montrer que $\nu : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n\in A} \frac{1}{1+n^2}$ est une mesure finie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. On définit $f : n \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{n}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}^0((\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})), \mathbb{R})$.
3. Montrer que $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ ssi $p \in [1, 2[$.

Exercice 2 Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty[$ les fonctions suivantes sont-elles dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$?

$$f_1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \qquad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \in \mathbb{R}, \qquad f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-x} \in \mathbb{R}$$
$$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto x\mathbb{1}_{[0,2]}, \quad f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\frac{1}{x} \in \mathbb{R}, \quad f_6 : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \in \mathbb{R}$$

Dans chaque cas, calculer N_p.

Exercice 3 On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, δ_a la mesure de Dirac en a. On définit

$$\mu : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_A^* e^{-2x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)d\lambda(x) + e^{-3}\delta_1(A)$$

1. Justifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce une mesure finie ?
2. La fonction $f(x) = x$ est elle μ-intégrable ? Même question pour la fonction $g(x) = e^x$.
3. Pour quels $p \in [1, +\infty[$ ces fonctions sont-elles dans $\mathcal{L}^p(\mu)$?

Exercice 4 (Inclusions)

1. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et μ une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$. Soient $1 \leqslant p < q$. Montrer que
$$\mathscr{L}^q(X, \mathscr{T}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu).$$
2. On se place maintenant sur $\ell^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que, pour tous $1 \leqslant p < q$, $\ell^p \subset \ell^q$,et que cette inclusion est stricte.

Exercice 5 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 \leqslant p_2$. Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a

$$\mathscr{L}^{p_1}(X, \mathscr{T}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(X, \mathscr{T}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu).$$

En déduire que, pour $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}; \mathbb{R})$, l'ensemble

$$I_f = \{p \in [1, +\infty[;\ f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)\}$$

est un intervalle.

Exercice 6 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}; \mathbb{R})$, on pose

$$N_\infty(f) = \inf\{C > 0, |f(x)| \leqslant C \ \mu - p.p.\} \in [0, +\infty]$$

et on note $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{T}, \mu) := \{f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}; \mathbb{R}), N_\infty(f) < \infty\}$.

1. On veut montrer que $f \leqslant N_\infty(f)$ μ-p.p.
   (a) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\mathscr{N}_k = \left\{x \in X, |f(x)| > N_\infty(f) + \frac{1}{k}\right\}$$

   Montrer que $\mathscr{N}_k \in \mathscr{T}$ et que $\mu(\mathscr{N}_k) = 0$.

   (b) Conclure.
2. On suppose maintenant que μ est une mesure finie.
   (a) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $N_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}} N_\infty$.

   (b) Soit $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

   $$A_\varepsilon = \{x \in X, |f(x)| > N_\infty(f) - \varepsilon\}$$

   Montrer que $\mu(A_\varepsilon) > 0$ et que, pour tout $p \geqslant 1$,

   $$(N_\infty(f) - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \leqslant N_p(f).$$

   (c) En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a

   $$N_\infty(f) = \lim_{p \to \infty} N_p(f).$$

2 Espaces L^p

Exercice 7 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} T : (\ell^2, \|.\|_2) &\to (\ell^1, \|.\|_1) \\ (a_n)_n &\mapsto \left(\frac{a_n}{n+1}\right)_n \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire, et continue. Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)}$.

Exercice 8 On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On considère la suite de fonctions définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{n} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 9 (Régularisation par convolution) Soient f, g deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Lorsque ça a un sens, on définit le *produit de convolution* de f et g par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tous réels λ, μ, le produit de convolution de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et $x \mapsto e^{\mu x}$ n'est pas défini.
2. On pose $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-2|x|}$. Calculer $f \star g$. Même question pour $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $g : x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
3. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\tau_h F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x+h)$.
   (a) Soient f, g deux fonctions boréliennes. Justifier que, si $f = g$ λ-p.p., alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h f = \tau_h g$ λ-p.p. Montrer que l'application

   $$f \in L^p(\mathbb{R}) \mapsto \tau_h f \in L_p(\mathbb{R})$$

   est bien définie pour tout h et qu'on a $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$.
   (b) Montrer que pour toute suite réelle $(h_n)_n$ qui tend vers 0, et pour toute fonction continue à support compact F, la suite de fonctions $(F_n = \tau_{h_n} F)_n$ vérifie

   $$\lim_{n\to\infty} N_p(F_n - F) = 0.$$

   (c) En déduire que $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$.
   (d) Montrer que, pour toute fonction $F \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$. On pourra utiliser le résultat suivant :

   Théorème 1 *L'ensemble $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$.*

4. Soient p, q deux exposants conjugués. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'alors $f \star g$ est bien définie, bornée sur $\mathbb{R}$ et vérifie

   $$N_\infty(f \star g) \leqslant N_p(f)N_q(g). \tag{2}$$

   (b) Montrer que $f \star g$ est uniformément continue.
   Indication : On pourra montrer que

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f \star g(x) - f \star g(x-z)| \xrightarrow{z\to 0} 0$$

5. Supposons maintenant que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g$ est définie μ-p.p. et que $f \star g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, avec

   $$N_1(f \star g) \leqslant N_1(f)N_1(g)$$

6. Supposons de plus que g est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.
   (a) Montrer que $f \star g$ est dérivable avec

   $$(f \star g)'(x) = f \star (g')(x).$$

   Indication : On peut utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{R}$,

   $$g(z+h) - g(z) - hg'(z) = h\int_0^1 (g'(z+th) - g'(z))dt$$

   et la continuité de g'.

(b) En déduire que $f \star g$ est $\mathscr{C}^\infty$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \star g)^{(n)}(x) = f \star (g^{(n)})(x).$$

7. Soit $\delta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \delta d\lambda = 1$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\delta_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Montrer que

$$N_1(f \star \delta_\varepsilon - f) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Indication : Remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon d\lambda = 1$, donc

$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_\varepsilon(y) d\lambda(y).$$

8. En déduire que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact g telle que $N_1(f - g) < \varepsilon$.