Exercice 3 – Exercice de synthèse

Soit la fonction $f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{x+1}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$.

La fonction $f(x)$ est rationnelle. Elle est donc définie si son dénominateur est non nul, autrement dit si $x \neq -1$. Le domaine de définition de cette fonction est donc :

$$Df =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[.$$

2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Pour lever les indéterminations à l'infini, vous utiliserez deux méthodes différentes.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ – méthode des équivalents

  Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 - 2x - 2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

  Pour lever cette indétermination, on peut utiliser le théorème suivant : un polynôme est équivalent à son monôme du plus haut degré en l'infini.

  Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2-2x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ – règle de l'Hospital

  Même type d'indétermination que dans le cas précédent.

  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = -x^2 - 2x - 2, v(x) = x + 1$ et donc $u'(x) = -2x - 2$ et $v'(x) = 1$.

  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x-2}{1} = -\infty$, on peut appliquer la règle de l'Hospital. On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-(-1^-)^2-2(-1^-)-2}{-1^-+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-(-1^+)^2-2(-1^+)-2}{-1^++1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

Ce n'est pas demandé, mais on peut donc remarquer que la fonction $f(x)$ a une asymptote verticale d'équation : x = - 1.

3. Quels sont les points candidats à un extremum local.

Ce sont les points dont l'abscisse annule la dérivée première de la fonction.

Or

$$f'(x) = \frac{(-2x-2)(x+1) - (-x^2-2x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 2x - 2 + x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$$

On a donc :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -2.$

Comme $f(0) = \frac{-2}{1} = -2$ et $f(-2) = \frac{-(-2)^2-2(-2)-2}{-2+1} = \frac{-4+4-2}{-1} = 2$, les deux points candidats à être extremum de la fonction sont : (0 , – 2) et (– 2 , 2).

4. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle croissante ? Sur quel(s) intervalle(s) est-elle décroissante ?
La fonction $f(\cdot)$ est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si sa dérivée première est positive (respectivement négative) sur I.
Or :
$f'(x) = \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}$ est du signe de $-x^2 - 2x$ car le dénominateur est un carré, toujours positif.
Comme on sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines, le polynôme $-x^2 - 2x$, est négatif si $x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ et positif sur $[-2; -1[\cup] - 1; 0]$.
La fonction $f(\cdot)$ est donc :

croissante sur $[-2; -1[\cup] - 1; 0]$ et décroissante sur $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.

5. Déterminer l'équations des tangentes au graphe de $f(x)$ aux points d'abscisse $x = -2$ et $x = 1$. Expliquez pourquoi l'une de ces tangentes est horizontale.
L'équation de la tangente au graphe de $f(x)$ aux points d'abscisse x_0 est :
$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

Pour $x_0 = -2$, on a :
- $f'(x_0) = f'(-2) = 0$ (voir plus haut : -2 est l'abscisse d'un point candidat)
- Et $f(x_0) = f(-2) = 2$ (calculé plus haut).

L'équation de la tangente est donc : $y = 2$. Cette tangente est horizontale car -2 est l'abscisse d'un point candidat.

Pour $x_0 = 1$, on a :
- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{-1^2-2(1)}{(1+1)^2} = \frac{-3}{4}$.
- et $f(x_0) = f(1) = \frac{-1^2-2(1)-2}{1+1} = \frac{-5}{2}$.

L'équation de la tangente est donc : $y = (x - 1)\frac{-3}{4} + \frac{-5}{2} = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{2}$, autrement dit :
$$y = \frac{-3}{4}x - \frac{7}{4}$$
6. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle convexe ? Sur quel(s) intervalle(s) est-elle concave ? La fonction admet-elle un ou plusieurs point(s) d'inflexion ?
La fonction $f(\cdot)$ est convexe (respectivement concave) sur un intervalle I si sa dérivée seconde est positive (respectivement négative) sur I.
Or :
$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2-(-x^2-2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(-2x-2)(x+1) \quad -2(-x^2-2x)}{(x+1)^3} = \frac{-2x^2-2x-2x-2+2x^2+4x}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$.
D'où :
$f''(x) > 0$ si $x < -1$ et $f''(x) < 0$ si $x > -1$.
La fonction $f(\cdot)$ est donc convexe sur $]-\infty; -1]$ et concave sur $[-1; +\infty[$.

7. Déterminer la nature des points candidats à un extremum local identifiés question 3.
$f''(0) = -2 < 0$ et $f''(-2) = 2$ donc la fonction a un maximum local en (0 ; - 2) et un minimum local en (0 ; 2).
8. Calculer la valeur que prend la fonction points candidats à un extremum local identifiés question 3.
Fait à la question 3.
9. A partir des informations précédentes, établir le tableau de variation complet de la fonction sur son domaine de définition.

10. La fonction admet-elle un maximum global ? Un minimum global ? Justifier.

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, la fonction n'admet pas de maximum ni de minimum global.

11. Esquisser la représentation graphique de la fonction f (x) sur son domaine de définition.