

Des exercices à connaître

TD07/L1 MIASHS

Exercice I Questions de cours

1. Donner la définition d'une application linéaire.
2. Donner la définition du noyau.
3. Donner la définition de l'image.
4. Énoncer le théorème du rang.
5. Énoncer le théorème de la base incomplète.
6. $f : E \rightarrow F$ est une application injective.
 - (a) Dans le cas où E et F sont deux ensembles quelconques, rappeler la définition de la injective.
 - (b) Dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels, rappeler la propriété de la injective.
7. $f : E \rightarrow F$ est une application surjective.
 - (a) Dans le cas où E et F sont deux ensembles quelconques, rappeler la définition de la surjectivité.
 - (b) Dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels, rappeler la propriété de la surjectivité.

Exercice II Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F .

1. Démontrer que $\text{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y) = (x - y, x + 2y, y - x)$.
 - (a) Démontrer que f est linéaire.
 - (b) En déduire que l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \text{ et } x + 2y = 0 \text{ et } y - x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
3. Démontrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y = 2z\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Quelle est sa dimension ? Donner un supplémentaire de E .

Exercice III Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction telle que $f(x, y, z, t) = (x + 2y - 3t, x + y, z - 2t, x + t)$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f .
3. déterminer le rang de f .
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice IV Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ une une matrice.

1. Quelle est la fonction linéaire associée à A ?
2. Quel est le rang de f ? (deux méthodes !)
3. Quelle est la dimension de $\text{Ker} f$? (deux méthodes !)
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Déterminer une base de $\text{Im} f$.
6. Déterminer une base de $\text{Ker} f$