- E, F 2 ev de dim finie.
  $f : E \longrightarrow F$ linéaire bijective (isomorphisme)
  ssi $\forall \mathcal{B}_E$ base de E, et $\mathcal{B}_F$ base de F, $[f]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est une matrice inversible

- $f(x,y,z) = (y+z, y, -x+y+2z)$
  $\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ base canonique

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que $f^{-1}(f(F)) = F + \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(F)) = F \cap \operatorname{Im} f$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$

$A \subset E$

$w \in f^{-1}(A)$
$\iff f(w) \in A$

$f(F) = \{f(x), x \in F\}$

1) Montrons que $f^{-1}(f(F)) = F + \operatorname{Ker} f$ ($\subset$, $u + v$)
→ on procède par double inclusion

$\boxed{\supset}$ Soit $w \in F + \operatorname{Ker} f$, montrons que $w \in f^{-1}(f(F))$
On sait : $w \in F + \operatorname{Ker} f$ donc il existe $u \in F$ et $v \in \operatorname{Ker} f$ tq $w = u + v$
→ on veut mq $w \in f^{-1}(f(F))$ càd $f(w) \in f(F)$
Or $f(w) = f(u+v) = f(u) + \underbrace{f(v)}_{0_E \text{ car } v \in \operatorname{Ker} f} = f(\underbrace{u}_{\in F}) \in f(F)$

→ $w \in f^{-1}(f(F))$

$\boxed{\subset}$ Soit $w \in f^{-1}(f(F))$, mq $w \in F + \operatorname{Ker} f$
→ On sait que $w \in f^{-1}(f(F))$ donc $f(w) \in f(F)$
Donc il existe $u \in F$ tq $f(w) = f(u)$
Donc $\underbrace{f(w) - f(u)}_{= f(w-u)} = 0_E$

$\Longrightarrow w - u \in \operatorname{Ker} f$: $\exists v \in \operatorname{Ker} f$ tq
$w - u = v$ donc $w = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in \operatorname{Ker} f} \in F + \operatorname{Ker} f$ ✓

⚠ $f(w) \in f(F)$ $\not\Rightarrow$ $w \in F$
ex $f(x) = x^2$
$f([0,2]) = [0,4]$
$f(-2) = 4 \in [0,4]$
$f(-2) \in f([0,2])$
mais $-2 \notin [0,2]$

$w \in f(A)$

2) Montrons que $f(f^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im} f$ par Double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $w \in f(f^{-1}(F))$ montrons que $w \in F \cap \mathrm{Im} f$

$\rightarrow$ On sait que $w \in f(f^{-1}(F))$ donc $\exists u \in f^{-1}(F) \subset E$ tq $w = f(u)$

$\rightarrow$ Donc $\exists u \in E$ tq $f(u) = w$

Donc $w \in \mathrm{Im} f$

De plus, $u \in f^{-1}(F)$ Donc $f(u) \in F$ Donc $w \in F$

$\rightarrow$ $w \in F \cap \mathrm{Im}(f)$

$f : E \rightarrow E$

$\boxed{\supset}$ Soit $w \in F \cap \mathrm{Im} f$, mq $w \in f(f^{-1}(F))$

$\rightarrow$ On sait que $w \in F$ et $w \in \mathrm{Im} f$

$\hookrightarrow$ Donc $\exists u \in E$ tq $w = f(u)$

Donc $f(u) \in F$ Donc $u \in f^{-1}(F)$

Donc $f(u) \in f(f^{-1}(F))$

autrement dit $w \in f(f^{-1}(F))$

⚠ $f^2 = f \circ f$

Exercice 6 On considère E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Prouver que $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$.

⚠ ces résultats sont vrais si $rg(f^2) = rg(f)$ (sinon on ne sait pas)

Ce qui est vrai en général, c'est $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$

1) Montrons que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$

$\subset$

- Soit $v \in \mathrm{Im}(f^2)$, alors $\exists u \in E$ tq $f^2(u) = v$, càd $f(f(u)) = v$

$\rightarrow$ v est l'image par f du vecteur $f(u) \in E$

Donc $v \in \mathrm{Im}(f)$

+ égalité des dimensions

- On a supposé que $\underbrace{rg(f^2)}_{= \dim(\mathrm{Im}(f^2))} = \underbrace{rg(f)}_{\dim(\mathrm{Im}(f))}$.

On a Donc

$\downarrow$ égalité des ensembles

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \\ \dim \mathrm{Im}(f^2) = \dim \mathrm{Im}(f)\end{array}\right\}$ Donc $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$

- Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(u) = 0_E$ Donc $f(f(u)) = f(0_E) = 0_E$

$\rightarrow (f \circ f)(u) = 0_E$ Donc $u \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$

- Par le théorème du rang

$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f^2) + \mathrm{rg}(f^2)$

$\rightarrow \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f^2) = \dim \mathrm{Ker}(f \circ f)$

On a donc $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \\ \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f^2) \end{array}\right\} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

2) Montrons que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$

càd $\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \leftarrow \\ \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E \end{cases}$

$E = F \oplus G$

$\Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$

Or, on sait par le thm du rang que $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E$

$\rightarrow$ reste à montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Soit $u \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ alors $\begin{cases} f(u) = 0_E \\ \exists w \in E \text{ tq } f(w) = u \end{cases}$

On a donc $0_E = f(u) = f(f(w))$

$\rightarrow w \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$

Or on a montré que $\mathrm{Ker}\, f \circ f = \mathrm{Ker}\, f$ donc $w \in \mathrm{Ker}\, f$

Donc $f(w) = 0_E$ càd $u = 0_E$

$\rightarrow$ On a donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

Exercice 1 On considère l'application

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, x + y - z) \in \mathbb{R}^2$$

1. Quelle est la taille d'une matrice qui représente f dans des bases quelconques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?
2. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3, \mathcal{B}' = \{(0, 1), (-1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$$

1) Quelles que soient les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ choisies

$[f]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}$ est une matrice de taille 2×3

2) $\mathcal{B}_0 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B}_0' = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow$

$\to f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = \underset{\sim}{1} f_1 + \underset{-}{1} f_2$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1) = -1 f_1 + 1 f_2 \leftarrow$ $\quad [f]_{B_0,B_0'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1) = 0 f_1 + (-1) f_2 \leftarrow$

$\underline{\underline{\text{Rq}}}$ $\quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,1)\}$
$\mathcal{B}' = \{v_1 = (0,1), v_2 = (1,-2)\}$

Je vous laisse vérifier que ce sont des bases

$f(u_1) = f(-1,1,0) = (-2,0) = -4 v_1 - 2 v_2$
$f(u_2) = f(1,0,1) = (1,0) = 2 v_1 + v_2$
$f(u_3) = f(1,1,1) = (0,1) = 1 v_1 + 0 v_2$

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 On considère l'application

$$f : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (a+b+c) + aX + bX^2 + cX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$$

et les familles de vecteurs

$$\mathcal{B} = \{\overset{u_1}{(1,1,1)}, \overset{u_2}{(1,1,0)}, \overset{u_3}{(1,0,0)}\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B}' = \{\overset{P_1}{1}, \overset{P_2}{1+X}, \overset{P_3}{1+X^2}, \overset{P_4}{1+X^3}\} \subset \mathbb{R}_3[X]$$

Je vous laisse faire $\to$ On admet que f est linéaire et que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1) $f(u_1) = 3 + X + X^2 + X^3 = 0P_1(X) + 1P_2(X) + 1P_3(X) + 1P_4(X)$
$f(u_2) = 2 + X + X^2 = 0P_1(X) + 1P_2(X) + 1P_3(X) + 0P_4(X)$
$f(u_3) = 1 + X = 0P_1(X) + 1P_2(X) + 0P_3(X) + 0P_4(X)$

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $u = (a,b,c) \in \operatorname{Ker} f$ ssi $f(u) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

ssi $[f(u)]_{\mathcal{B}'} = 0_{\mathbb{R}^4}$ (les coord de $f(u)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(0,0,0,0)$)

propriété des matrices représentatives ssi $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}} = 0_{\mathbb{R}^4}$

→ Déterminons $[u]_{\mathcal{B}}$: les coordonnées de (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$