Convergence de suites dans $L^p(\mu)$

$\rightarrow$ Il faut distinguer 2 modes de convergence pour $(f_n)_n \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$

$L^p(\mu)^{\mathbb{N}} \rightarrow$ les suites de $L^p(\mu)$

Déf Soit $(f_n)_n \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$

- $(f_n)_n$ converge dans $L^p(\mu)$, ou en norme $L^p(\mu)$ s'il existe $f \in L^p(\mu)$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (convergence au sens des e.v.n.)
- $(f_n)_n$ converge μ-pp vers f si $\mu(\{x \in X,\ f_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\}) = 0$

E e.v. (ou un ensemble) $E^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_n,\ u_n \in E\}$ est l'ensemble des suites de E (ex $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ens. des suites réelles)

⚠ Ces 2 modes de convergence sont différents

ex 1 $f_n(x) = n^{1/p} \mathbb{1}_{[0,1/n]}$ (sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$)

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $\rightarrow$ si $x<0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  $\rightarrow$ si $x>0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < x$

  Donc $\forall n \geq n_0$, $x \notin [0, \frac{1}{n}]$ donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  et $f_n(0) = n^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

  $\rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \not\to 0\} = \{0\}$ qui est de mesure nulle pour λ_1

Donc $(f_n)_n$ cv vers la fonction nulle λ_1-p.p.

- $(f_n)_n$ cv vers 0 dans $L^p(\mu)$?

$$\|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p \, d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} (n^{1/p} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x))^p \, d\lambda_1(x)$$

$$= n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1/n]}(x) \, d\lambda_1(x) = n\, \lambda_1([0, \tfrac{1}{n}]) = 1 \not\to 0$$

$\rightarrow$ $(f_n)_n$ ne tend pas vers la fonction nulle dans $L^p(\mu)$

ex 2 $f_0(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

$f_1 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ $\quad f_2 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$

$f_3 = \mathbb{1}_{[0,1/4]}$, $f_4 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}$ $\quad f_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$ $\quad f_6 = \mathbb{1}_{[3/4,1]}$

$\rightarrow$ $f_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}$ $\quad$ k tq $2^k \leq n < 2^{k+1}$ et $j = n - 2^k$

On a $\|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p \, d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}^p_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]} \, d\lambda_1 = \lambda\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $(f_n)_n$ tend vers 0 dans $L^p(\lambda_1)$

mais $\forall x \in [0,1]$, $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str croissante tq $f_{\phi(n)}(x) = 1$ $\forall n$

Donc $f_n(x) \not\to 0$

$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}, f_n(x) \not\to 0\}) = \lambda_1([0,1]) = 1 \neq 0$

$\to (f_n)_n$ ne tend pas vers 0 λ_1-p.p.

Thm (Riesz-Fisher) L'e.v.n. $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet
càd toute suite de Cauchy de $L^p(\mu)$ converge en norme $L^p(\mu)$

Preuve Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall q \geq n \geq N_\varepsilon$, $\|f_q - f_n\|_p < \varepsilon$ (C)

$\to$ On cherche $f \in L^p(\mu)$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Stratégie
- Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, elle converge ssi elle admet une sous-suite $(f_{\phi(n)})_n$ convergente
- On va construire une sous suite tq

$f_{\phi(n)} - f_{\phi(0)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)})}_{S_n}$ converge dans $L^p(\mu)$

$\phi = \varphi = \text{phi}$

① Il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_n$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

$\hookrightarrow$ **Preuve :** On construit $\phi(n)$ par récurrence

$\underline{n=0}$ On applique (C) avec $\varepsilon = 1$: on trouve N_0 tq

$\forall q \geq n \geq N_0$, $\|f_q - f_n\|_p \leq 1$

En particulier, si $q > N_0$, $\|f_q - f_{N_0}\|_p \leq 1$

$\to$ on pose $\phi(0) = N_0$.

$\underline{n=1}$ D'après (C), l'ensemble

$A_1 = \{N \in \mathbb{N}, \forall q \geq n \geq N, \|f_q - f_n\| \leq \frac{1}{2}\}$ est infini

Donc $A_1 \cap \{N_0+1, N_0+2, \dots\} \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow$ on pose $\phi(1) = \min(A_1 \cap \{N_0+1, N_0+2, \dots\}) \in \mathbb{N}$

On a alors $\phi(1) > \phi(0)$ et donc $\|f_{\phi(1)} - f_{\phi(0)}\|_p < 1$

et de plus, $\forall q > \phi(1)$, $\|f_q - f_{\phi(1)}\|_p \leq \frac{1}{2}$

$n \rightsquigarrow n+1$ Supposons qu'on a construit $\phi(0) < \phi(1) < \ldots < \phi(n)$ tq $\forall k \in \{0, \ldots n-1\}$, $\|f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$

et construisons $f_{\phi(n+1)}$: D'après (C)

l'ensemble $A_{n+1} = \{N \in \mathbb{N},\ \forall q \geq j \geq N,\ \|f_q - f_j\|_p \leq \frac{1}{2^{n+1}}\}$ est infini,

donc non majoré

donc $A_{n+1} \cap \{\phi(n)+1, \phi(n)+2, \ldots\} \neq \emptyset$

$\to$ on pose $\phi(n+1) = \min(A_{n+1} \cap \{\phi(n)+1, \phi(n)+2, \ldots\}) \in \mathbb{N}$

On a alors $\phi(n+1) > \phi(n)$, $\|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}$

et $\forall q \geq n+1$, $\|f_q - f_{\phi(n+1)}\|_p \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$\to$ On obtient ainsi $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str croissante tq $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\|_p < \frac{1}{2^n}$$

Fin preuve ①

② Notons $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_{\phi(k+1)}(x) - f_{\phi(k)}(x)|$ $\to$ $g_n : X \to \mathbb{R}^+$ et $g_n \in L^p(\mu)$ (somme finie de fonctions L^p)

$\to$ $\forall x \in X$, $g_n(x)$ est une série à t.g. positifs, donc elle cv dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

On peut donc poser $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |f_{\phi(k+1)}(x) - f_{\phi(k)}(x)|$ $\quad g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$\to$ g est mesurable (mais on ne sait pas encore si $g \in L^p(\mu)$)

(limite de la suite $(g_n)_n \in \mathcal{L}_0^{\mathbb{N}}$)

$\to$ Notons que $(g_n)_n$ est croissante : $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_{n+1}(x) - g_n(x) = |f_{\phi(n+2)}(x) - f_{\phi(n+1)}(x)| \geq 0$

donc $(g_n^p)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives

Par le thm de convergence monotone

$$\int_X g^p \, d\mu = \int_X \lim g_n^p \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n^p \, d\mu$$

Or $\left(\int_X g_n^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|g_n\|_p \overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\|f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}\|_p}_{\leq \frac{1}{2^k}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

Donc $\forall n$ $\int_X g_n^p \, d\mu \leq 2^p$ et donc $\lim_{n \to \infty} \int_X g_n^p \, d\mu \leq 2^p$

$\to$ $\int_X g^p \, d\mu \leq 2^p < \infty$ (donc $g \in L^p(\mu)$)

$\to$ Autrement dit, g^p est intégrable donc finie μ-pp sur X

donc g est finie μ-pp.

μ-pp. $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{\phi(k+1)}(x) - f_{\phi(k)}(x)| < \infty$

Fin point ②

③ $\to$ μ-pp, $\sum_{k=0}^{\infty}(f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)})$ est une série abs cv, donc cv

Autrement dit, $\underline{\mu\text{-pp}}$, la fonction

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}) = f_{\phi(n+1)}(x) - f_{\phi(0)}(x)$$

converge vers une fonction $S(x)$

Posons $f(x) = \begin{cases} S(x) + f_{\phi(0)}(x) & \text{si } S_n(x) \text{ converge} \\ \frac{\pi^4}{37} & \text{si } S_n(x) \text{ ne converge pas} \end{cases}$

(Du coup, μ-pp, $f_{\phi(n)}(x) \longrightarrow f(x)$)

④ Reste à mq $f \in L^p(\mu)$ et que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On va utiliser le théorème de convergence dominée

- $\forall x \in X$, $|f_{\phi(n)}(x)| = |f_{\phi(0)} + \sum_{k=0}^{n}(f_{\phi(k+1)}(x) - f_{\phi(k)}(x))|$

$$\leq |f_{\phi(0)}| + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |f_{\phi(k+1)}(x) - f_{\phi(k)}|}_{g_n(x)} \leq \underbrace{|f_{\phi(0)}(x)|}_{\in L^p(\mu)} + \underbrace{|g(x)|}_{\in L^p(\mu)}$$

$\to$ $|f_{\phi(n)}(x)|^p \leq \underbrace{(|f_{\phi(0)}(x)| + |g(x)|)^p}_{\text{intégrable}}$

- $|f_{\phi(n)}(x)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(x)|^p$ $\forall x \in X$

$\to$ par le thm de convergence dominée, $|f|^p$ est intégrable donc $f \in L^p(\mu)$

(et $\int_X |f|^p d\mu = \lim \int_X |f_{\phi(n)}|^p d\mu$)

D'autre part, $|f_{\phi(n)}(x) - f(x)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ μ-pp

et $|f_{\phi(n)}(x) - f(x)|^p = (|f_{\phi(0)} + S_n(x) - f(x)|)^p$

$$\leq (|f_{\phi(0)}| + g_n(x) + |f(x)|)^p \leq \underbrace{(|f_{\phi(0)}| + g + |f|)^p}_{\text{intégrable}}$$

$\to$ Par le théorème de cv dominée

$$\int_X |f_{\phi(n)} - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ donc } \|f_{\phi(n)} - f\|_p \longrightarrow 0$$

⑤ La suite de Cauchy $(f_n)_n$ admet une sous-suite convergente
Donc elle converge

$\to$ $L^p(\mu)$ est complet

$\square$