Exercice 4 (Inclusions) 1. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et μ une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$. Soient $1 \leqslant p < q$. Montrer que

$$\mathscr{L}^q(X, \mathscr{T}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu).$$

Fait la dernière fois

2. On se place maintenant sur $\ell^p = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que, pour tous $1 \leqslant p < q$, $\ell^p \subset \ell^q$, et que cette inclusion est stricte.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f \in \ell^p$ ssi $\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\mu < \infty$

càd $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p < \infty$

2) Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tq $p < q$

Montrons que $\ell^p \subset \ell^q$

Soit $f \in \ell^p$, montrons que $f \in \ell^q$

$\to$ on veut mq la série $\sum |f(n)|^q$ converge

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(n)|^q = |f(n)|^p \, |f(n)|^{\overbrace{q-p}^{>0}}$

De plus, $\sum |f(n)|^p < \infty$ Donc $|f(n)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\to$ Du coup $(f(n))_n$ est une suite bornée : $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(n)| \leq M$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(n)|^{q-p} \leq M^{q-p}$ (car $q - p > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq |f(n)|^q \leq \underbrace{M^{q-p}}_{\text{cste}} \underbrace{|f(n)|^p}_{\text{t.g. d'une série convergente}}$

$\leadsto$ par le critère de comparaison, la série $\sum |f(n)|^q$ est convergente

càd $f \in \ell^q$ $\leadsto$ $\boxed{\ell^p \subset \ell^q}$

ex $f(n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\to$ pour quels p est-ce que $f \in \ell^p$?

$\sum |f(n)| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

$\to f \notin \ell^1$

$\sum |f(n)|^p = \sum \frac{1}{n^{p/2}}$

$\hookrightarrow$ cv ssi $\frac{p}{2} > 1$ càd $p > 2$

$\to f \in \ell^p$ $\forall p \in]2, +\infty[$

Reste à mq cette inclusion est stricte : on cherche $f \in \ell^q$ tq $f \notin \ell^p$

Posons $f(n) = \frac{1}{n^{1/p}}$ alors $\sum |f(n)|^q = \sum \frac{1}{n^{q/p}} < \infty$ car $\frac{q}{p} > 1$

$\leadsto f \in \ell^q$

et $\sum |f(n)|^p = \sum \frac{1}{n^{p/p}} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$\leadsto f \notin \ell^p$

Exercice 5 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 \leqslant p_2$. Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a

$$\mathscr{L}^{p_1}(X, \mathscr{T}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(X, \mathscr{T}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu).$$

En déduire que, pour $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}; \mathbb{R})$, l'ensemble

$$I_f = \{p \in [1, +\infty[; \ f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)\}$$

est un intervalle.

Soient $p_1 \leq p \leq p_2$

Montrons que $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \cap \mathcal{L}^{p_2}(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

Soit $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mu) \cap \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$

$$|f(x)|^p \leq |f(x)|^{p_2} \quad \text{si } \underline{|f(x)| \geq 1}$$

$$|f(x)|^p \leq |f(x)|^{p_1} \quad \text{si } |f(x)| \leq 1$$

$$\leadsto |f(x)|^p = |f(x)|^p \left(\mathbb{1}_{\{x,\, |f(x)|>1\}} + \mathbb{1}_{\{x,\, |f(x)| \leq 1\}}\right)$$

$$= |f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\underbrace{\{|f|>1\}}_{\text{mesurable ?}}} + |f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\underbrace{\{|f| \leq 1\}}_{\text{mesurable ?}}}$$

et $|f|$ est mesurable
$]1,+\infty[\,,\ ]-\infty,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\Big\}$ $\underbrace{|f|^{-1}(]1,+\infty[)}_{=\{|f|>1\}}$ et $\underbrace{|f|^{-1}(]-\infty,1])}_{=\{|f|\leq 1\}} \in \underset{\text{(la tribu)}}{\underset{\text{joli T}}{\mathcal{T}}}$

On a donc
$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^{p_2} \, d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x)|^{p_1} \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_X \underbrace{|f(x)|^{p_2} \, d\mu(x)}_{\substack{<\infty \\ \text{car } f \in \mathcal{L}^{p_2}}} + \int_X \underbrace{|f(x)|^{p_1} \, d\mu(x)}_{\substack{<\infty \\ \text{car } f \in \mathcal{L}^{p_1}}} < \infty$$

$\to f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ donc $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \cap \mathcal{L}^{p_2}(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

Fixons $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{T}; \mathbb{R})$ et notons
$$I_f = \{p \in [1,+\infty[\,,\ f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

→ Si $f \notin \mathcal{L}^p(\mu)$ quelque soit p, $I_f = \emptyset$ est un "intervalle"

→ Idem si $I_f = \{p\}$

→ On a mq si $p_1, p_2 \in I_f$, $p_1 \neq p_2$ (disons $p_1 < p_2$) alors $[p_1, p_2] \subset I_f$

En effet, si $p_1, p_2 \in I_f$ alors $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ donc $f \in \mathcal{L}^p$ $\forall p \in [p_1, p_2]$
donc $p \in I_f$ $\forall p \in [p_1, p_2]$

$\leadsto$ I_f est un sous-ensemble <u>convexe</u> de $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle.

Exercice 8 On rappelle que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$
On considère la suite de fonctions définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{n}e^{-\frac{n^2x^2}{2}}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

1) $(f_n)_n$ cvs vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$:

Soit $x>0$, $f_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-\frac{n^2x^2}{2}} = e^{\ln(\sqrt{n}) - \frac{n^2x^2}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}(\ln(n) - n^2x^2)} = e^{\underbrace{-\frac{n^2}{2}(x^2 - \frac{\ln(n)}{n^2})}_{\to -\infty}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad x^2 \to x^2$, $\frac{\ln(n)}{n^2} \to 0$

(cv croissances comparées)

2) Convergence dans $L^1(\mathbb{R}_+^*)$ On a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n(x)|\, d\lambda_1(x) = \sqrt{n}\int_{]0,+\infty[} e^{-\frac{n^2x^2}{2}} d\lambda_1(x) = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{n^2x^2}{2}} dx$$

$u = nx/\sqrt{2}$
$du = n\, dx$

$$= \sqrt{n}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{2}n}du = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

f° paire

$$= \frac{1}{2\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ càd $(f_n)_n$ cv vers 0 dans $L^1(\lambda_1)$

3) Je vous laisse mq $\|f_n\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f_n \not\to 0$ dans $L^2(\lambda_1)$