**Exercice 4** On considère les applications linéaires suivantes :

$$f : P \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$$
$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - 2y, 2x - y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Donner la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_1[X]$ et de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de $g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{\cancel{2}\,1}[X]$ et de $\mathbb{R}^2$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $g \circ f$ est un isomorphisme.

1) Base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ : $\mathcal{B}_0 = \{E_0(X) = 1, E_1(X) = X\}$
Base canonique de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_0' = \left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$f(E_0) = (E_0(0), E_0(1)) = (1,1) = 1e_1 + 1e_2$
$f(E_1) = (E_1(0), E_1(1)) = (0,1) = 0e_1 + 1e_2$

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

$g(\cancel{E_0}(X))$

2) Matrice de $g$ dans $\mathcal{B}_0'$

$g(e_1) = g(1,0) = (1,2) = 1e_1 + 2e_2$
$g(e_2) = g(0,1) = (-2,-1) = (-2)e_1 + (-1)e_1$

$$\boxed{[g]_{\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$$

3) Méthode 1 : $g \circ f(P) = g(f(P)) = g(P(0), P(1))$
$= (P(0) - 2P(1), 2P(0) - P(1))$

$\leadsto$ Matrice de $g \circ f$

$g\circ f(E_0) = (\underbrace{E_0(0)}_{=1} - 2\underbrace{E_0(1)}_{=1}, 2\underbrace{E_0(0)}_{=1} - \underbrace{E_0(1)}_{=1}) = (-1, 1) = (-1)e_1 + 1e_2$

$g\circ f(E_1) = (\underbrace{E_1(0)}_{=0} - 2\underbrace{E_1(1)}_{=1}, 2\underbrace{E_1(0)}_{=0} - \underbrace{E_1(1)}_{=1}) = (-2,-1) = (-2)e_1 + (-1)e_2$

$$[g\circ f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \checkmark$$

Méthode 2 $[g\circ f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = [g]_{\mathcal{B}_0'}[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \checkmark$$

4) $g \circ f$ isomorphisme ? $\longrightarrow$ càd $g \circ f$ est linéaire et bijective

- Noyau de $g \circ f$ : Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ $P(X) = aX + b$

$P \in \ker(g \circ f) \iff (g \circ f)(P) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (P(0) - 2P(1), 2P(0) - P(1)) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\iff \begin{cases} P(0) - 2P(1) = 0 \\ 2P(0) - P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b - 2(a+b) = 0 \\ 2b - (a+b) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -b - 2a = 0 \\ b - a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b - 2a = 0 \\ -3a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

$\iff P = 0_{\mathbb{R}_1[X]}$

$\rightarrow$ $\ker(g \circ f) = \{0_{\mathbb{R}_1[X]}\}$ Donc $(g \circ f)$ est injective

$\rightarrow$ Par le théorème du rang

$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = rg(g \circ f) = \underbrace{\dim \mathbb{R}_1[X]}_{=2} - \underbrace{\dim \ker(g \circ f)}_{=0} = 2$

Donc $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\}$ Donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$
$\rightarrow g \circ f$ est surjective

$\rightarrow$ $g \circ f$ est un isomorphisme

Ou sinon $g \circ f$ isomorphisme $\iff [g \circ f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0'}$ est inversible

$\det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) - (-2) \times 1 = 3 \neq 0$

$\rightarrow$ $[g \circ f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0'}$ est inversible Donc $g \circ f$ est un isomorphisme

**Exercice 5** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de $E$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 = v + w, e_2 = w + u, e_3 = u + v)$ est encore une base de E. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

- $\mathcal{B}'$ base de $E$ ?

Card $\mathcal{B}' = 3 = \dim E$, Donc il suffit de mq $\mathcal{B}'$ est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, supposons que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E$

On a donc $\lambda_1(v + w) + \lambda_2(w + u) + \lambda_3(u + v) = 0_E$

$$\Leftrightarrow (\lambda_2+\lambda_3)\underline{u} + (\lambda_1+\lambda_3)\underline{v} + (\lambda_1+\lambda_2)\underline{w} = 0_E$$

Or $\mathcal{B}$ est une base, donc c'est une famille libre

On en déduit que
$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est libre
Donc c'est une base de E.

- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\underline{\mathcal{B}'}$

$\rightarrow$ $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$

Coord. de $e_1$ dans $\mathcal{B}$ : $e_1 = 0u + 1v + 1w$
—— $e_2$ dans $\mathcal{B}$ $e_2 = 1u + 0v + 1w$
—— $e_3$ —— $e_3 = 1u + 1v + 0w$

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Bonus Matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ ?

$\rightarrow$ Coordonnées de $u, v, w$ dans $\mathcal{B}'$ en colonne

$\rightarrow$ Sinon, $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

**Exercice 6** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$[f]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. Soit $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ avec $u = (1,0,1)$, $v = (-1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base. → Je vous laisse faire
2. Déterminer la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}'$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ dans $\mathcal{B}$.

2) Matrice de $f$ dans $\mathcal{B}' = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$f(u) = (1,0,1) = u = 1u + 0v + 0w$

$f(v) = (-1,1,0) = v = 0u + 1v + 0w$

$f(w) = f(1,1,1) = (2,1,2) = u + w = 1u + 0v + 1w$

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

3) $$\underbrace{[f^n]_{\mathcal{B}}}_{=A} = [\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f]_{\mathcal{B}} \times [f]_{\mathcal{B}} \times \dots \times [f]_{\mathcal{B}}}_{n \text{ fois}} = A^n$$

Pb Ce n'est pas facile de calculer $A^n$

Par contre $B = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ avec $N^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

Donc $N^3, N^4 \dots = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$\text{Donc } B^n = \underbrace{(I_3 + N)^n}_{I_3 N = N I_3} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k \geq 2} I_3^{n-k}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{N^0}_{I_3} \underbrace{I_3^n}_{I_3} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \underbrace{N^1}_{N} \underbrace{I_3^{n-1}}_{= I_3} = I_3 + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Lien entre $\underset{[f]_{\mathcal{B}}}{\overset{\shortparallel}{A}}$ et $\underset{[f]_{\mathcal{B}'}}{\overset{\shortparallel}{B}}$ ?

Formule de changement de base $B = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} A P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Donc $A = PBP^{-1}$

Donc $A^n = (PBP^{-1})^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1})$

$= PB\underbrace{\cancel{P^{-1}P}}_{I_3}B\underbrace{\cancel{P^{-1}}}_{I_3} \dots \underbrace{\cancel{P^{-1}P}}_{I_3}BP^{-1}$

$= P B^n P^{-1}$

$P =$ matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $P^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{P^{-1}}$$

On a donc au total

$[f^n]_{\mathcal{B}} = A^n = P B^n P^{-1}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+n \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{[f^n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+n & n & n \\ 0 & 1 & 2 \\ n & n & 1+n \end{pmatrix}}$$

Rq Du coup $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(f \circ f \circ \dots \circ f)(x,y,z) = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (1+n)x + ny + nz \\ y + 2z \\ nx + ny + (1+n)z \end{pmatrix}$

**Exercice 7** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y, y-x, x-z)$$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire. → Je vous laisse faire
2. Donner la matrice de $f$ dans la base suivante de $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,0)\}.$$

3. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de $f$ dans la base canonique.

2) $f(v_1) = f(1,0,1) = (1,-1,0) = v_1 - v_2$

$f(v_2) = f(0,1,1) = (-1,1,-1) = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$

$f(v_3) = f(1,1,0) = (0,0,1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (-1,1,-1)$

càd $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -2\lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3/2 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = 1/2 \end{cases}$

On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,1)$

càd $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/2 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

3) Matrice de passage de $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

à $\mathcal{B}_0 = \left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Méthode 1 : on trouve les coordonnées de $e_1, e_2, e_3$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \\ e_2 &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \\ e_3 &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 \end{aligned}\right\} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Méthode 2 On sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}^{-1}$ avec $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$