Semaine du 22 avril : Développements limités

CORRECTION

Il existe plusieurs formules pour calculer un développement limité (DL). Dans ce cours, nous avons choisi de vous présenter la formule de Taylor-Young dont les conditions d'application sont les suivantes : Si $f(x)$ est n fois dérivable sur I et sa dérivée n^{ieme} est continue sur I, alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in I$, alors on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \times f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \times f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \times f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.

Exercice 1 : **Déterminer la partie régulière du développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de la fonction $g(x) = \frac{1}{1-x}$.**

$g(x) :]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\to \mathbb{R}$. La fonction $g(x)$ est infiniment dérivable sur son domaine de définition donc en $x = 0$.

DL à l'ordre 3, $g(x) = g(0) + (x-0) \times g'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} \times g''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} \times g'''(0) + (x-0) \times \varepsilon(x-0)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x - 0) = 0$, on déduit la partie régulière en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + (x-0) \times g'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} \times g''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} \times g'''(0) \\ &= g(0) + x \times g'(0) + \frac{x^2}{2} \times g''(0) + \frac{x^3}{6} \times g'''(0) \end{aligned}$$

On calcule les dérivées et nombres dérivés souhaités ainsi que la valeur de la fonction en $x_0 = 0$.
$g(0) = 1$
$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $g'(0) = 1$
$g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ donc $g''(0) = 2$
$g'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ donc $g'''(0) = 6$

DL à l'ordre 3 : $T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$.
Donc la partie régulière est $T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

Remarque : Plus x est proche de 0 plus la partie régulière du DL donnera une approximation juste : $g(0,5) = 2$ et $T_3(0,5) = 1,875$ et $g(0,01) = 1,0101010...$ et $T_3(0,01) = 1,010101$.

Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

1) **Déterminer les développements limités à l'ordre 0,1,2 et 3 en $x_0 = 0$ pour cette fonction.**
Rmq : $f(x) :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$. La fonction $f(x)$ est infiniment dérivable sur $]-1; +\infty[$ donc en $x_0 = 0$.

A l'ordre n, le DL s'écrit :

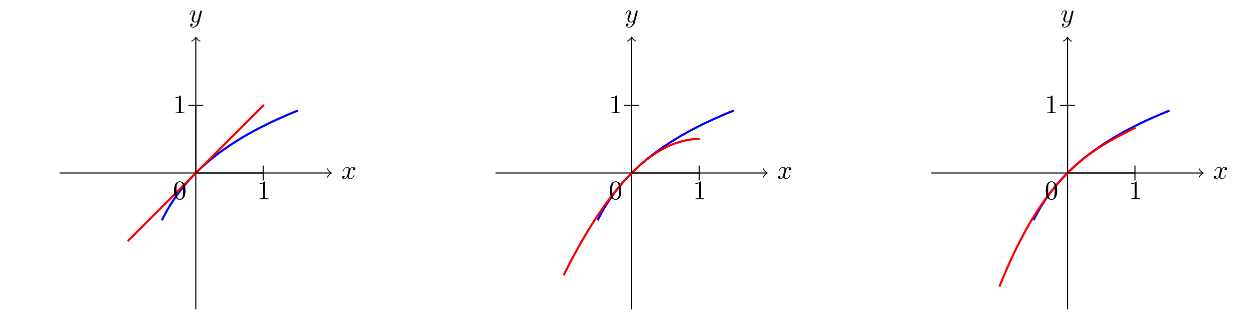
$$f(x) = f(0) + \frac{x-0}{1!} \times f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} \times f''(0) + ... + \frac{(x-0)^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + (x-0)^n \times \varepsilon(x-0)$$

On calcule les dérivées et nombres dérivés souhaités ainsi que la valeur de la fonction en $x_0 = 0$.
$f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $f'(0) = 1$
$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ et $f''(0) = -1$
$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ et $f'''(0) = 2$

DL à l'ordre 0 : $T_0(x) = f(0) = 0 + x^0\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
DL à l'ordre 1 : $T_1(x) = f(0) + x \times f'(0) + x^1\varepsilon(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
DL à l'ordre 2 : $T_2(x) = f(0) + x \times f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} \times f''(0) + x^2\varepsilon(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
DL à l'ordre 3 : $T_3(x) = f(0)+x\times f'(0)+\dfrac{x^2}{2!}\times f''(0)+\dfrac{x^3}{3!}\times f'''(0)+x^3\varepsilon(x) = x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

2) Donner une approximation de $\ln 1,15$ à partir des différents développements limités. Lequel donne la meilleure approximation ?
$T_0(0,15) = 0 + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $T_0(0,15) = 0$.
$T_1(0,15) = 0,15 + 0,15\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $T_1(0,15) = 0,15$.
$T_2(0,15) = 0,15 - \dfrac{0,15^2}{2!} + 0,15^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $T_2(0,15) = 0,13875$.
$T_3(x) = 0,15 - \dfrac{0,15^2}{2!} + \dfrac{0,15^3}{3!} + 0,15^3\varepsilon(x) = 0,1393125$



$f(x) = \ln(x+1)$ et DL à ordre 1 $f(x) = \ln(x+1)$ et DL à ordre 2 $f(x) = \ln(x+1)$ et DL à ordre 3

Exercice 3 : Déterminer une approximation du nombre e à partir du développement limité de la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre 4.

Soit $f(x) = e^x$. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 :
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \varepsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Pour $x = 1$: $e^x = e$, on obtient $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + ... + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \varepsilon(x)$.
A l'ordre 4, on obtient : $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24}$ avec la calculatrice : $e = 2,70833333$

Exercice 4 : Développement de Taylor-Young (Sujet du partiel de juin 2023).
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-2}$.

1) **Calculer la valeur de la fonction et de ses dérivées première, deuxième et troisième au point $x_0 = 3$. (2 pts)**
$f(3) = \sqrt{3-2} = 1$
$f'(x) = \dfrac{1}{2} \times (x-2)^{\frac{-1}{2}}$ donc $f'(3) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{4} \times (x-2)^{\frac{-3}{2}}$ donc $f''(x) = \dfrac{-1}{4}$
$f'''(x) = \dfrac{3}{8} \times (x-2)^{\frac{-5}{2}}$ donc $f'''(x) = \dfrac{3}{8}$

2) **Donner l'équation de la fonction $T(x)$ qui donne la partie régulière du développement limité de la fonction $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x_0 = 3$.(1 pt)**
Partie régulière à l'ordre 2 en $x_0 = 3$:

$$f(x) = f(3) + \frac{x-3}{1!} \times f'(3) + \frac{(x-3)^2}{2!} \times f''(3)$$

$$T_2(x) = f(3) + (x-3) \times f'(3) + \frac{(x-3)^2}{2!} \times f''(3)$$
$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \times (x-3) + \frac{-1}{4} \times \frac{(x-3)^2}{2}$$

3) **Simplifier le calcul de $T(x)$ pour l'écrire sous la forme d'un polynôme de degré 2. (1 pt)**
$T_2(x) = \dfrac{1}{8} \times \left(-x^2 + 10x - 13\right)$