Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2023-2024

Contrôle continu 2

Durée : 1h.

Expliquez votre raisonnement le plus clairement possible, même s'il n'a pas abouti.

Bon courage !

Question de cours

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, tels que $\dim E > \dim F$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Enoncer le théorème du rang. En déduire que f ne peut pas être injective.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note

$$u_1 = e_1 - 2e_2 - 5e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_3 = 5e_1 + 2e_2 - e_3$$

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre. Est-elle génératrice ?
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ une fonction linéaire telle que $\varphi(u_1) = (1, 3)$ et $\varphi(u_2) = (-1, 1)$. Calculer $\varphi(u_3)$.

Exercice 2

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{Vect}(v_1 = (1, -2, -5), v_2 = (1, 1, 1)), \quad G = \{(3a + 6b, 2a + 4b, -a - 2b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Donner une base et la dimension de F et G.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 3

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x + y + (\beta + 4)z \\ -2x + y + 2z \\ -5x + y - z + (\beta^2 - 1)yz \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. Calculer $f_\beta(0, 1, 1)$ et $f_\beta(0, 2, 2)$. Montrer que f_β est un endomorphisme ssi $\beta = 1$ ou $\beta = -1$.
2. Pour $\boxed{\beta = 1}$, donner une base de $\mathrm{Ker}\, f_\beta$, puis déterminer si f_β est injective, surjective, bijective.
3. Pour $\boxed{\beta = -1}$, déterminer $\mathrm{Ker}\, f_\beta$. En déduire que f_β est bijective.
4. Pour $\boxed{\beta = -1}$, donner la matrice qui représente f_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Fin de l'énoncé.