Algèbre Linéaire 1
CC2 - 24 avril 2024 - Corrigé

Question de cours

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, tels que $\dim E > \dim F$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Enoncer le théorème du rang. En déduire que f ne peut pas être injective.

- Théorème du rang : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$
  où $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$

- On en déduit que
  $\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \mathrm{rg}(f)$
  Or $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$ donc $\mathrm{rg}(f) \leq \dim F$
  Donc $\dim \mathrm{Ker} f \geq \dim E - \dim F > 0$
  Donc $\dim \mathrm{Ker} f \neq 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$
  Donc f n'est pas injective

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note

$$u_1 = e_1 - 2e_2 - 5e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_3 = 5e_1 + 2e_2 - e_3$$

⚠ A priori $E \neq \mathbb{R}^3$ Donc on ne peut pas dire "Soit $u = (x,y,z) \in E$"

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre. Est-elle génératrice ?
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ une fonction linéaire telle que $\varphi(u_1) = (1, 3)$ et $\varphi(u_2) = (-1, 1)$. Calculer $\varphi(u_3)$.

1) Montrons que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée : on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \quad (*)$$

Or $(*) \Leftrightarrow \lambda_1(e_1 - 2e_2 - 5e_3) + \lambda_2(e_1 + e_2 + e_3) + \lambda_3(5e_1 + 2e_2 - e_3) = 0_E$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)e_1 + (-2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e_2 + (-5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)e_3}_{\text{Combinaison linéaire de } e_1, e_2, e_3} = 0_E$$

Or, $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E, Donc c'est une famille libre
càd $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Donc $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 + 24\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -4\lambda_3 \end{cases}$ Ce système a une infinité de solution, donc il a des solutions non nulles

Par exemple $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -4$ et $\lambda_1 = -1$ est solution

càd $-u_1 - 4u_2 + u_3 = 0_E$ (Donc $u_3 = u_1 + 4u_2$)

$\rightarrow$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre

- $\{u_1, u_2, u_3\}$ génératrice ?

Méthode 1 : Par l'absurde

Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ était génératrice

Comme $\mathrm{Card}(\{u_1, u_2, u_3\}) = 3 = \dim E$,

ce serait une base de E

Mais alors ce serait une famille libre, ce qui contredit notre résultat précédent : contradiction

$\rightarrow$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice

Méthode 2 : Avec la définition

⚠ A priori $u \in E$ et pas à $\mathbb{R}^3$, donc on ne peut pas écrire $u = (x, y, z)$

Soit $u \in E$, on veut savoir s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ (**)

Or $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, donc $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq

$u = xe_1 + ye_2 + ze_3$

(**) se réécrit donc

$(\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)e_1 + (-2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e_2 + (-5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)e_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3-x)e_1+(-2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3-y)e_2+(-5\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-z)e_3=0_E$

Or e_1, e_2, e_3 est libre, donc

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3-x=0 \\ -2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3-y=0 \\ -5\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=x \\ -2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=y \\ -5\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=z \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=x \\ 3\lambda_2+12\lambda_3=y+2x \\ 6\lambda_2+24\lambda_3=z+5x \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=x \\ 3\lambda_2+12\lambda_3=y+2x \\ 0=z+x-2y \end{cases}$$

Donc si $x-2y+z\neq 0$, par ex si $x=1$, $y=z=0$
alors ce système n'a pas de solution
autrement dit $u=xe_1+ye_2+ze_3 \notin Vect(u_1,u_2,u_3)$
$\to \{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice.

2) φ linéaire, $\varphi(u_1)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\varphi(u_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
Or on a obtenu que
$$u_3=u_1+4u_2$$
Donc $\varphi(u_3)=\varphi(u_1+4u_2) \overset{\varphi \text{ est linéaire}}{=} \varphi(u_1)+4\varphi(u_2)$
$$=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F=\mathrm{Vect}(v_1=(1,-2,-5), v_2=(1,1,1)), \quad G=\{(3a+6b, 2a+4b, -a-2b), a,b\in\mathbb{R}\}$$

1. Donner une base et la dimension de F et G.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

1) Base et dimension de F
$\to \{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de F
(par définition du sous-espace engendré $Vect(v_1,v_2)$)
$\to \{v_1,v_2\}$ est une famille à 2 vecteurs, et
ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires,
donc $\{v_1,v_2\}$ est libre

Donc $\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de F et donc $\dim F = \text{Card}(\{v_1, v_2\}) = 2$

• Base et dimension de G

Soit $u \in \mathbb{R}^3$

alors $u \in G \iff \exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $u = \begin{pmatrix} 3a+6b \\ 2a+4b \\ -a-2b \end{pmatrix}$

$\iff$ ——— tq $u = \begin{pmatrix} 3a \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6b \\ 4b \\ -2b \end{pmatrix}$

$\iff \exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $u = a\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_4}$

$\iff u \in \text{Vect}(v_3, v_4)$

$\rightarrow G = \text{Vect}(v_3, v_4)$

Donc $\{v_3, v_4\}$ est une famille génératrice

mais $v_4 = 2v_3$ donc ce n'est pas une famille libre

On a donc $G = \text{Vect}(v_3, v_4) = \text{Vect}(v_3)$

Donc $\{v_3\}$ est une famille génératrice de G

et $v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\{v_3\}$ est libre

$\rightarrow$ $\left\{v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de G et $\dim G = \text{Card}(\{v_3\}) = 1$

2) Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Méthode 1 On montre que si on note $\mathcal{B}_F = \{v_1, v_2\}$ la base de F et $\mathcal{B}_G = \{v_3\}$ la base de G

alors $\underbrace{\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G}_{\{v_1, v_2, v_3\}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Comme $\text{Card}(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de mq $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, supposons que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\-2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\-5\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3+5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_2+8\lambda_3=0\\6\lambda_2+14\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_2+8\lambda_3=0\\-2\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre et donc $\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Donc $\mathbb{R}^3=F\oplus G$

<u>Méthode 2</u> On montre que $\dim F+\dim G=\dim\mathbb{R}^3$
et que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

⚠ ça ne suffit pas, il faut aussi

- On a bien $\dim F+\dim G=2+1=3=\dim\mathbb{R}^3$
- Montrons que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $u\in F\cap G$. Alors $\begin{cases}u\in F \text{ donc } \exists\lambda_1,\lambda_2 \text{ tq } u=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\\ u\in G \text{ donc } \exists\lambda_3 \text{ tq } u=\lambda_3v_3\end{cases}$

Donc $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=\lambda_3v_3$

càd $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2-\lambda_3v_3=0_{\mathbb{R}^3}$

càd $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\-2\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=0\\-5\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3+5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\3\lambda_2-8\lambda_3=0\\6\lambda_2-14\lambda_3=0\end{cases}$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\3\lambda_2-8\lambda_3=0\\2\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}$$

Donc $u=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=0v_1+0v_2=0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $\boxed{\mathbb{R}^3=F\oplus G}$

Exercice 3

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x+y+(\beta+4)z \\ -2x+y+2z \\ -5x+y-z+(\beta^2-1)yz \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. Calculer $f_\beta(0,1,1)$ et $f_\beta(0,2,2)$. Montrer que f_β est un endomorphisme ssi $\beta = 1$ ou $\beta = -1$.
2. Pour $\boxed{\beta = 1}$, donner une base de $\operatorname{Ker} f_\beta$, puis déterminer si f_β est injective, surjective, bijective.
3. Pour $\boxed{\beta = -1}$, déterminer $\operatorname{Ker} f_\beta$. En déduire que f_β est bijective.
4. Pour $\boxed{\beta = -1}$, donner la matrice qui représente f_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) $f_\beta(0,1,1) = (\beta+5, 3, \beta^2-1)$
$f_\beta(0,2,2) = (2\beta+10, 6, 4(\beta^2-1))$

Rq $f_\beta(0,2,2) = 2f_\beta(0,1,1)$ ssi $\beta^2-1=0$ càd $(\beta=1$ ou $\beta=-1)$

Mq f_β est un endomorphisme $\Leftrightarrow (\beta=1$ ou $\beta=-1)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f_β est un endomorphisme
alors f_β est une application linéaire
Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $f_\beta(\lambda u) = \lambda f_\beta(u)$
En particulier, pour $u = (0,1,1)$ et $\lambda = 2$, on a
$f_\beta(0,2,2) = f_\beta(2(0,1,1)) = 2f_\beta(0,1,1)$
Donc $(2\beta+10, 6, 4(\beta^2-1)) = 2(\beta+5, 3, (\beta^2-1))$
càd $(2\beta+10, 6, 4(\beta^2-1)) = (2\beta+10, 6, 2(\beta^2-1))$
Donc $4(\beta^2-1) = 2(\beta^2-1)$ Donc $2(\beta^2-1) = 0$
Donc $\beta^2 = 1$ càd $\beta = 1$ ou $\beta = -1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\beta = 1$ ou -1 et mq f_β est un endomorphisme
$f_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, il suffit de mq f_β est linéaire

Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$
On a
$f_\beta(u+\lambda v) = f_\beta(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$

$\beta = 1$ ou -1
Donc $\beta^2 - 1 = 0$

$$= \begin{pmatrix} x+\lambda x' + y+\lambda y' + (\beta+4)(z+\lambda z') \\ -2x-2\lambda x' + y+\lambda y' + 2z+2\lambda z' \\ -5x-5\lambda x' + y+\lambda y' - z-\lambda z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+y+(\beta+4)z \\ -2x+y+2z \\ -5x+y-z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'+y'+(\beta+4)z' \\ -2x'+y'+2z' \\ -5x'+y'-z' \end{pmatrix}$$

$$= f_\beta(u) + \lambda f_\beta(v)$$

→ f_β est linéaire

2) $\boxed{\beta=1}$ $\quad f_\beta(x,y,z) = (x+y+5z,\ -2x+y+2z,\ -5x+y-z)$

• Noyau de f_β $\quad$ Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

alors $u\in \operatorname{Ker} f_\beta \iff f_\beta(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \begin{cases} x+y+5z = 0 \\ -2x+y+2z = 0 \\ -5x+y-z = 0 \end{cases}$$

C'est le même système qu'à l'exercice 1

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -4z \end{cases}$$

$$\iff u = (-z,-4z,z),\ z\in\mathbb{R}$$

$$= z(-1,-4,1)$$

$$\iff u \in \operatorname{Vect}((-1,-4,1))$$

$\operatorname{Ker} f_\beta = \operatorname{Vect}((-1,-4,1))$

→ $\{(-1,-4,1)\}$ engendre $\operatorname{Ker} f_\beta$, et c'est une famille libre puisque $(-1,-4,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc c'est une base de $\operatorname{Ker} f_\beta$.

→ $\operatorname{Ker} f_\beta \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ Donc f_β n'est pas injective (et donc pas bijective)

→ Par le théorème du rang,

$\dim \operatorname{Im} f_\beta = \operatorname{rg} f_\beta = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f_\beta = 3-1 = 2$

Donc $\mathrm{Im}\, f_\beta \neq \mathbb{R}^3$: f_β n'est pas surjective

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} x + y + (\beta + 4)z \\ -2x + y + 2z \\ -5x + y - z + (\beta^2 - 1)yz \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

3. Pour $\boxed{\beta = -1}$, déterminer $\mathrm{Ker}\, f_\beta$. En déduire que f_β est bijective.
4. Pour $\boxed{\beta = -1}$, donner la matrice qui représente f_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) $\boxed{\beta = -1}$ $\quad f_\beta(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + 3z \\ -2x + y + 2z \\ -5x + y - z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Noyau de f_β Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in \mathrm{Ker}\, f_\beta \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Même système qu'à l'ex. 2

$$\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ -5x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$\rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f_\beta = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc f_β est injective

et par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f_\beta) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} - \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\, f_\beta}_{=0} = 3$

On a donc $\begin{cases} \mathrm{Im}\, f_\beta \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim \mathrm{Im}\, f_\beta = \mathrm{rg}\, f_\beta = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ donc $\mathrm{Im}\, f_\beta = \mathbb{R}^3$, donc f_β est surjective

$\rightarrow$ f_β est bijective (c'est un isomorphisme)

4) $\mathcal{B}_0 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$f_\beta(1,0,0) = (1,-2,-5) = 1e_1 - 2e_2 - 5e_3$

$f_\beta(0,1,0) = (1,1,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$

$f_\beta(0,0,1) = (3,-2,-1) = 3e_1 + (-2)e_2 + (-1)e_3$

$$\boxed{[f_\beta]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$