**Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne**
**L3 MIASHS 2023-2024**
**Compléments de calcul intégral et différentiel**

# CC2

Durée : 1h30.

**Exercice 1** On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 3y^2 = 12,\ x + y + 4z = 2\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z^2 + 1$ admet des extrema sur $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les extrema de $f_{|\mathcal{C}}$.

**Exercice 2** On définit les applications suivantes :

$$\mu_1 : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_B e^{-2x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) d\lambda_1(x)$$
$$\mu_2 : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \delta_n(B)$$
$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

1. Justifier que $\mu_1, \mu_2$ et $\mu$ sont des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce que ce sont des mesures finies ? Des mesures de probabilité ?
2. Montrer que $\mathscr{L}^p(\mu) = \mathscr{L}^p(\mu_1) \cap \mathscr{L}^p(\mu_2)$.
3. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $p \geqslant 1$, $x^\alpha \notin \mathscr{L}^p(\mu)$.

**Exercice 3** On travaille dans $[0, 1]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = n\mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}\frac{1}{n}[}$$

1. A l'aide de l'inégalité de Hölder, montrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}^0([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]))$, si $p < q$ alors $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$.
2. Montrer que la suite $(f_n)$ converge vers 0 dans $L^p([0, 1])$ pour $p \in [1, 2[$.
3. Soit $p \geqslant 2$. Montrer que si $(f_n)_n$ converge dans $L^p([0, 1])$, alors sa limite est 0.
4. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas dans $L^p$ pour $p \geqslant 2$.