Compléments d'Analyse
CC2 - 30 avril 2024 - Corrigé

Exercice 1 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+3y^2 = 12,\ x+y+4z = 2\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z^2+1$ admet des extrema sur $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les extrema de $f_{|\mathcal{C}}$.

1) Existence des extrema : on va utiliser, pour ne pas changer, le théorème de Weierstrass.

- La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$
- Notons $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$(x,y,z) \longmapsto (x^2+3y^2-12,\ x+y+4z-2)$$

Alors g est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$
et $\mathcal{C} = g^{-1}(\underbrace{\{(0,0)\}}_{\text{fermé de } \mathbb{R}^2})$, donc $\mathcal{C}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$

De plus, pour tout $u=(x,y,z) \in \mathcal{C}$, on a
$$x^2 \leq x^2+3y^2 = 12 \quad \text{donc} \quad |x| \leq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$3y^2 \leq x^2+3y^2 = 12 \quad \text{donc } y^2 \leq 4, \text{ donc } |y| \leq 2$$
et $4z = 2-x-y$ donc $|z| = \frac{1}{4}|2-x-y| \leq \frac{1}{4}(2+\underbrace{|x|}_{\leq 2\sqrt{3}}+\underbrace{|y|}_{\leq 2})$

donc $|z| \leq \frac{1}{4}(4+2\sqrt{3}) = 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$u \in \mathcal{C} \Rightarrow \|u\|_\infty \leq 2\sqrt{3}$ donc $\mathcal{C}$ est borné

Donc, $\mathcal{C}$ est un fermé borné dans $\mathbb{R}^3$ qui est un e.v. de dimension finie : donc $\mathcal{C}$ est compact

$\rightarrow$ Par le théorème de Weierstrass, f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{C}$, autrement dit $f_{|\mathcal{C}}$ admet (au moins) un maximum global et (au moins) un minimum global sur $\mathcal{C}$

2) Les fonctions f et g sont polynomiales, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, $\forall u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Jac} g(u) = \begin{pmatrix} 2x & 6y & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

→ Jac $g(u)$ est de rang <2 ssi les 2 lignes de Jac $g(u)$ sont colinéaires, ce qui est le cas ssi $x=y=0$ mais alors, l'équation $x^2+3y^2=12$ n'est pas vérifiée : $\forall z\in\mathbb{R},\ (0,0,z)\notin\mathcal{C}$

→ $\forall u\in\mathcal{C}$, rg Jac $g(u)=2$, donc $Dg(u)$ est surjective.

D'après le théorème des extrema liés, si $u=(x,y,z)\in\mathcal{C}$ est un extremum local de f, alors il existe $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tq

$$\nabla f(u)=\lambda_1\nabla g_1(u)+\lambda_2\nabla g_2(u)$$

en notant $g(u)=(g_1(u),g_2(u))\in\mathbb{R}^2$

Or, $\nabla f(u)=\begin{pmatrix}0\\0\\2z\end{pmatrix}$ $\nabla g_1(u)=\begin{pmatrix}2x\\6y\\0\end{pmatrix}$ $\nabla g_2(u)=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

Donc on obtient le système d'équations

$$\begin{cases}2\lambda_1x+\lambda_2=0 & L_1\\ 6\lambda_1y+\lambda_2=0 & L_2\\ 4\lambda_2=2z & L_3\\ x^2+3y^2=12 & L_4\\ x+y+4z=2 & L_5\end{cases}\ \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\ \begin{cases}2\lambda_1x+\lambda_2=0\\ 2\lambda_1(3y-x)=0\\ 2\lambda_2=z\\ x^2+3y^2=12\\ x+y+4z=2\end{cases}$$

D'après (L_2), il y a 2 possibilités : soit $\lambda_1=0$, soit $3y-x=0$

Cas 1 Si $\lambda_1=0$

alors par (L_1) on a $\lambda_2=0$, et donc par (L_3), $z=0$

Dans ce cas (L_4) et (L_5) donnent

$$\begin{cases}x^2+3y^2=12\\ x+y=2\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+3y^2=12\\ x=y-2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(y-2)^2+3y^2=4y^2-4y+4=12\\ x=y-2\end{cases}\iff\begin{cases}y^2-y-2=0\\ x=y-2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(y+1)(y-2)=0\\ x=y-2\end{cases}\iff\begin{cases}y=-1,\ x=-3\\ \text{ou}\\ y=2\quad x=0\end{cases}$$

→ On trouve 2 points candidats : $u_1 = (-3,-1,0)$
et $u_2 = (0,2,0)$

<u>Cas 2</u> $3y - x = 0$ donc $x = 3y$

Dans ce cas (L_5) donne $3y + y + 4z = 2$ donc $z = \frac{1}{2} - y$

et (L_4) donne $x^2 + 3y^2 = 12y^2 = 12$

donc $y^2 = 1$, donc

- soit $y = 1$, et $x = 3$, $z = -\frac{1}{2}$
- soit $y = -1$ et $x = -3$, $z = 3/2$

→ On trouve 2 autres points candidats
$u_3 = (3, 1, -1/2)$ et $u_4 = (-3, -1, 3/2)$

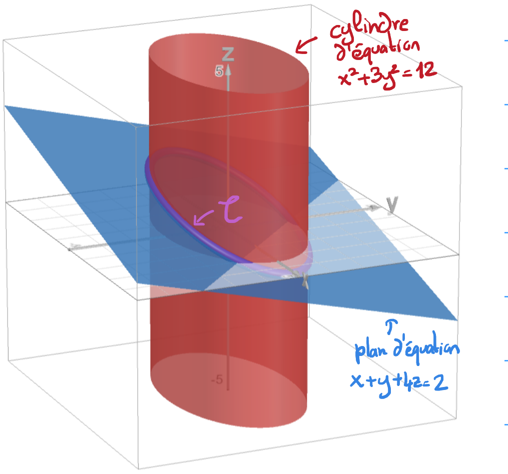
On sait par (1) que f admet des extrema sur $\mathcal{C}$
et on sait par le TEL que ces extrema sont parmi les points u_1, u_2, u_3, u_4

Or, on calcule

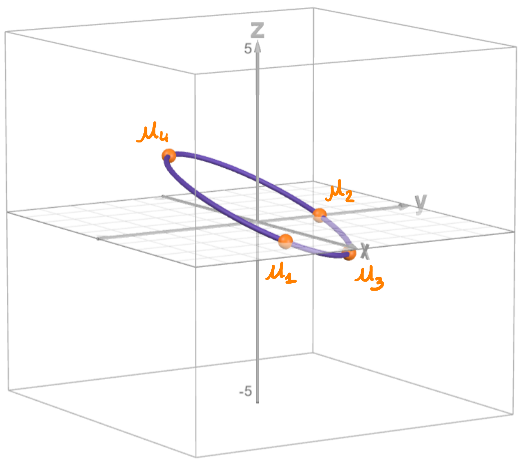
$$f(u_1) = f(u_2) = 1 < f(u_3) = \frac{5}{4} < f(u_4) = \frac{13}{4}$$

Donc les minima de f le sont $u_1 = (-3,-1,0)$ et $u_2 = (0,2,0)$
et le maximum de f le est $u_4 = (-3,-1,3/2)$.

Graphiquement, voilà ce qui se passe :



Représentation de $\mathcal{C}$
(intersection d'un cylindre avec un plan)
<u>rq</u> le cylindre n'est pas borné :
donc $x^2+3y^2=12$ ne suffit pas
pour majorer $\|(x,y,z)\|$



Points candidats : le point le plus haut (u_4)
le plus bas (u_3) et les 2 points à $z=0$
$(u_2$ et $u_1)$

Exercice 2 On définit les applications suivantes :

$$\mu_1 : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_B e^{-2x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) d\lambda_1(x)$$

$$\mu_2 : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \delta_n(B)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

1. Justifier que μ_1, μ_2 et μ sont des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce que ce sont des mesures finies ? Des mesures de probabilité ?

1) • Étude de μ_1

Notons $\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-2x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \in \mathbb{R}$

alors φ_1 est positive

et φ_1 est le produit de $x \longmapsto e^{-2x}$ qui est continue donc borélienne, et de $\mathbb{1}_{]0,\infty[}$ qui est l'indicatrice d'un borélien, donc φ_1 est mesurable

De plus, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_1(B) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 \, d\lambda_1$$

$\rightarrow$ μ_1 est la mesure de densité φ_1 par rapport à la mesure de Lebesgue, donc c'est une mesure.

• On calcule

$$\mu_1(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \, d\lambda_1(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-2x} \, d\lambda_1(x)$$

lien entre les intégrales de Lebesgue et de Riemann pour les fonctions continues

$$\overset{\downarrow}{=} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc $\mu_1(\mathbb{R}) < \infty$: μ_1 est une mesure finie

mais $\mu_1(\mathbb{R}) \neq 1$: μ_1 n'est pas une mesure de probabilités

• Étude de μ_2

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, δ_n est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(c'est la mesure de Dirac au point $n \in \mathbb{N}^*$)

on ne demande pas de le démontrer

$\rightarrow$ μ_2 est une somme dénombrable de mesures, donc c'est une mesure

⚠ On ne peut pas dire que μ_2 est une mesure à densité par rapport à la mesure de comptage, car dans ce cas ce serait une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et non sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

On calcule

$$\mu_2(\mathbb{R}) = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\delta_n(\mathbb{R})}_{\substack{=1\ \forall n\in\mathbb{N}^* \\ \text{car } n\in\mathbb{R}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

c'est une somme infinie

→ μ_2 n'est pas une mesure finie, et donc ce n'est pas non plus une mesure de probabilités.

2. Montrer que $\mathscr{L}^p(\mu) = \mathscr{L}^p(\mu_1) \cap \mathscr{L}^p(\mu_2)$.

On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on a donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu < \infty$

Or, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d(\mu_1+\mu_2) = \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu_2$

Preuve (non demandée)

↳ Montrons que, pour toute fonction mesurable positive $\varphi \in \mathcal{L}^0((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})); \mathbb{R}^+)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2 \quad (*)$$

Étape 1 Fonctions indicatrices

Soit B un borélien, $\varphi = \mathbb{1}_B$ son indicatrice. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, d(\mu_1+\mu_2) = (\mu_1+\mu_2)(B)$$

$$= \mu_1(B) + \mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, d\mu_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2$$

→ $(*)$ est vraie si φ est une indicatrice

Étape 2 Fonctions étagées

Supposons que φ est étagée : alors il existe $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{-}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mu_1+\mu_2)(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mu_1(B_i) + \mu_2(B_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_1(B_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_2(B_i)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2$$

$\rightarrow$ $(*)$ est vérifiée si φ est étagée

Étape 3 φ mesurable positive

Enfin, prenons $\varphi \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}); \mathbb{R}^+)$

Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tq

- $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad ((\varphi_n)_n$ croissante$)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n$ est étagée.

Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_1 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2 \end{array}\right\} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d(\mu_1+\mu_2)}_{} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2) \quad \text{donc} \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_2 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2)$$

$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\mu_2$ (étape 2)

Par unicité de la limite, on a donc $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d(\mu_1+\mu_2) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_2$

$\rightarrow$ $(*)$ est vraie pour toute fonction mesurable positive $\square$

On a donc

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\mu}_{<\infty} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\mu_1}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\mu_2}_{\geq 0} \geq \int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\mu_1$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_1 < \infty$, donc $f \in \mathcal{L}^p(\mu_1)$

De même, $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu < \infty$

Donc $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_2 < \infty$; Donc $f \in \mathcal{L}^p(\mu_2)$

$\longrightarrow$ $f \in \mathcal{L}^p(\mu_1) \cap \mathcal{L}^p(\mu_2)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mu_1) \cap \mathcal{L}^p(\mu_2)$ alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_1}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu_2}_{<\infty} < \infty$$

Donc $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

3. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $p \geqslant 1$, $x^\alpha \notin \mathscr{L}^p(\mu)$.

Notons $f_\alpha(x) = x^\alpha$, alors d'après (2.)

$f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ssi $(f \in \mathcal{L}^p(\mu_1)$ et $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu_2))$.

Or, on a, d'une part,

$x^\alpha \geqslant 0$ pour $x \in]0,+\infty[$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\alpha|^p d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} |x^\alpha|^p e^{-2x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) d\lambda_1(x) = \int_{]0,+\infty[} x^{\alpha p} e^{-2x} d\lambda_1(x)$$

lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue pour les fonctions C^0

$$= \int_0^{+\infty} x^{\alpha p} e^{-2x} dx \rightarrow \text{intégrale généralisée à étudier en } 0 \text{ et en } +\infty$$

En $+\infty$ on a $x^2 (x^{\alpha p} e^{-2x}) = x^{\alpha p+2} e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, par croissances comparées

(quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \geqslant 1$)

Donc il existe $M > 0$ tq $\forall x \geqslant M$, $x^{\alpha p+2} e^{-2x} \leqslant 1$, càd $x^{\alpha p} e^{-2x} \leqslant \frac{1}{x^2}$

et $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc $\int_M^{+\infty} x^{\alpha p} e^{-2x} dx$ aussi

Reste à étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^M x^{\alpha p} e^{-2x} dx$

Or, $x^{\alpha p} \underbrace{e^{-2x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{\alpha p}$, et $\int_0^M x^{\alpha p} dx = \int_0^M \frac{1}{x^{-\alpha p}} dx$ converge ssi $-\alpha p < 1$

et il en est donc de même pour $\int_0^1 x^{\alpha p} e^{-2x} dx$

On en déduit que $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu_1)$ ssi $-\alpha p < 1$

D'autre part,

$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\delta_a = \varphi(a)$ (intégrale / à une mesure de Dirac)

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\alpha|^p d\mu_2 = \sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} |f_\alpha|^p d\delta_n = \sum_{n \geqslant 1} |f_\alpha(n)|^p$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} n^{\alpha p} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{-\alpha p}}$$

Or, cette série converge ssi $-\alpha p > 1$

Donc $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu_2)$ ssi $-\alpha p > 1$

On a donc $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ssi $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mu_1) \cap \mathcal{L}^p(\mu_2)$

ssi $-\alpha p < 1$ et $-\alpha p > 1$

$\rightarrow$ impossible, quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall p \geqslant 1$, $x_\alpha \notin \mathcal{L}^p(\mu)$

Exercice 3 On travaille dans $[0,1]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = n \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}$$

1. A l'aide de l'inégalité de Hölder, montrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}^0([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$, si $p < q$ alors $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$.

1) L'inégalité de Hölder dit que, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^0([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, $\forall a, b \geqslant 1$ tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, on a

$$\int_{[0,1]} |\varphi_1 \varphi_2| \, d\lambda_1 \leqslant \left(\int_{[0,1]} |\varphi_1|^a d\lambda_1 \right)^{1/a} \left(\int_{[0,1]} |\varphi_2|^b d\lambda_1 \right)^{1/b}$$

Ici, on a $f \in \mathcal{L}^0([0,1])$, et on veut majorer $\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda_1$ par $\int_{[0,1]} |f|^q d\lambda_1 = \int_{[0,1]} (|f|^p)^{q/p} d\lambda_1$

Pour cela, on va appliquer Hölder avec $\varphi_1 = |f|^p$, $\varphi_2 = 1$ et $a = q/p > 1$

$\to$ Reste à déterminer b tq $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

càd $\frac{1}{\frac{q}{p}}+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{b}=1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q} \Leftrightarrow \boxed{b=\frac{q}{q-p}}$

On obtient donc

$$\int_{[0,1]}|f|^p d\lambda_1 = \int_{[0,1]}|f|^p \cdot 1 \, d\lambda_1 \leq \left(\int_{[0,1]}(|f|^p)^{q/p} d\lambda_1\right)^{p/q}\left(\int_{[0,1]} 1^{\frac{q}{q-p}} d\lambda_1\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$\leq \left(\int_{[0,1]}|f|^q d\lambda_1\right)^{p/q}\left(\underbrace{\int_{[0,1]} 1 \, d\lambda_1}_{=\lambda_1([0,1])=1}\right)^{q-p/p}$$

Donc, en prenant la puissance $1/p$,

$$\left(\int_{[0,1]}|f|^p d\lambda_1\right)^{1/p} \leq \left(\int_{[0,1]}|f|^q d\lambda_1\right)^{1/q} \cdot \underbrace{1^{\frac{q-p}{pq}}}_{=1}$$

autrement dit $\|f\|_p \leq \|f\|_q$

2. Montrer que la suite (f_n) converge vers 0 dans $L^p([0,1])$ pour $p \in [1,2[$.

On calcule

$$\|f_n-0\|_p^p = \int_{[0,1]}|f_n-0|^p d\lambda_1 = \int_{[0,1]} n^p \underbrace{\mathbb{1}^p_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}}_{=\mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}}(x)\, d\lambda_1(x)$$

$$= n^p \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[} \, d\lambda_1(x) \quad \text{or, } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ ]\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}[\subset[0,1]$$

$$= n^p \lambda_1\left(]\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}[\right) = n^p\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^p}{n(n+1)}$$

Donc $\|f_n\|_p = \dfrac{n}{n^{\frac{1}{p}}(n+1)^{\frac{1}{p}}} = \dfrac{n}{n^{\frac{2}{p}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/p}} = n^{1-\frac{2}{p}}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/p}}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\frac{2}{p}<0 \Leftrightarrow p<2 \\ 1 & \text{si } 1-\frac{2}{p}=0 \Leftrightarrow p=2 \\ +\infty & \text{si } 1-\frac{2}{p}>0 \Leftrightarrow p>2 \end{cases}$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ dans $L^p(\lambda_1)$ ssi $p<2$

3. Soit $p \geqslant 2$. Montrer que si $(f_n)_n$ converge dans $L^p([0,1])$, alors sa limite est 0.

Soit $p \geq 2$, supposons que $(f_n)_n$ converge dans $L^p([0,1])$
Alors il existe $f \in L^p([0,1])$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Mais alors, comme $p>1$, on a par 1.
$0 \leq \|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Donc $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$, autrement dit $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1([0,1])$

Mais on a vu en 2. que $f_n \longrightarrow 0$ dans $L^1([0,1])$
Donc, par unicité de la limite dans L^1, $\boxed{f=0}$
$\rightarrow$ La limite de $(f_n)_n$ dans L^p, si elle existe, est forcément la fonction nulle

4. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas dans L^p pour $p \geqslant 2$.

On a vu en 3. que si $(f_n)_n$ converge dans L^p, pour $p \geq 2$, alors sa limite est forcément 0.
Alors, on aurait $\|f_n - 0\|_p = \|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Mais ceci contredit le resultat obtenu en 2. : on a trouvé que $\|f_n\|_p \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } p=2 \\ +\infty & \text{si } p>2 \end{cases}$
Donc $(f_n)_n$ ne converge pas dans L^p pour $p \geq 2$