Université Paris 1 - Magistère d'Economie
Optimisation – Exercices supplémentaires corrigés

Exercice 1.

Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow (x-y) e^{-x^2-2y^2}$

Correction :

La condition nécessaire du premier ordre pour un extremum libre est l'annulation du gradient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

c'est à dire $\begin{cases} e^{-x^2-2y^2} - 2x(x - y) e^{-x^2-2y^2} = 0 \\ - e^{-x^2-2y^2} - 4y(x - y) e^{-x^2-2y^2} = 0 \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} 1 - 2x(x - y) = 0 \\ -1 - 4y(x - y) = 0 \end{cases}$

On voit que la quantité $x - y$ *ne peut pas s'annuler et en additionnant les deux équations on obtient* $-2x - 4y = 0$. *Ensuite, en reportant* $x = -2y$ *dans une des deux équations, on obtient*

$1 - 12y^2 = 0$

On a donc deux points candidats :

$A = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right)$ *et* $B = -A$

Comme $f(A) < 0$ *et* $f(B) > 0$, A *doit être le minimum et* B *le maximum de* f *(en admettant l'existence de ces extremums).*

Exercice 2

Soit a, b, p, q, R des paramètres strictement positifs, on considère le programme

$$(P) \begin{cases} Max \quad \dfrac{-1}{x+a} + \dfrac{-1}{y+b} \\ px + qy \leq R \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) S'agit-il d'un programme convexe ?

Le domaine K *est convexe puisque toutes les contraintes sont affines.*

La fonction objectif qu'on maximise a pour matrice Hessienne

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{(x+a)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{(y+b)^3} \end{bmatrix}$$

Elle est diagonale, les éléments diagonaux sont les deux valeurs propres, elles sont strictement négatives en tout point (x, y) du domaine, donc f est (strictement) concave sur K. (On peut aussi voir f comme somme de fonctions concaves sur R+)

Le programme (P) est donc convexe.

b) Montrer que la solution de (P) existe et est unique

Le domaine est fermé puisque toutes les contraintes sont larges. Le domaine est borné puisque, dans K, $0 \leq x \leq R/p$ et $0 \leq y \leq R/q$

Donc il existe au moins une solution.

Par ailleurs le domaine est convexe et on maximise une fonction strictement concave, donc la solution est unique.

c) Montrer par un argument simple que la contrainte $px+qy \leq R$ est saturée à l'optimum

La fonction objectif est strictement croissante en x, si $px + qy < R$ alors $px' + qy = R$ en posant $x' = x + (R - px - qy)/p$, le point (x', y) appartient au domaine et améliore la fonction objectif.

d) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kühn et Tücker. Ces conditions sont-elles nécessaires ? suffisantes ? (justifier)

Le Lagrangien du programme est

$$L(x, y, \lambda, \mu_x, \mu_y) = f(x, y) + \lambda(R - px - qy) + \mu_x x + \mu_y y$$

Les conditions de Kühn et Tücker sont

$$(KT)\begin{cases} \dfrac{1}{(x+a)^2} - \lambda p + \mu_x = 0 \\ \dfrac{1}{(y+b)^2} - \lambda q + \mu_y = 0 \\ \lambda(R - px - qy) = 0 \\ \mu_x x = 0 \\ \mu_y y = 0 \\ \lambda, \mu_x, \mu_y \geq 0 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Les conditions sont nécessaires car le domaine est qualifié puisque toutes les contraintes sont affines.

Les conditions sont suffisantes car le programme est convexe.

e) En supposant $x > 0$ et $y > 0$ à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelles conditions doivent être alors vérifiées par les paramètres ?

Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\mu_x = \mu_y = 0$ et on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(x+a)^2} - \lambda p = 0 \\ \dfrac{1}{(y+b)^2} - \lambda q = 0 \\ px + qy = R \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x+a = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p}} \\ y+b = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{q}} \\ p(x+a) + q(y+b) = R + pa + qb \end{cases}$$

Donc, en reportant les deux premières équations dans la dernière :

$$\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{\lambda}} = R + pa + qb$$

Puis

$$\begin{cases} x+a = \dfrac{R+pa+qb}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{p}} \\ y+b = \dfrac{R+pa+qb}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{q}} \end{cases}$$

Il faut

$$x > 0,\ y > 0$$

Les conditions sur les paramètres sont donc

$$\begin{cases} R > a\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) - pa - qb \\ R > b\sqrt{q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) - pa - qb \end{cases} \text{ , c'est à dire } \begin{cases} R > a\sqrt{p}\sqrt{q} - qb \\ R > b\sqrt{q}\sqrt{p} - pa \end{cases}$$

f) En supposant x = 0 à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante

Si x = 0 alors y = R/q et donc $\mu_y = 0$ *, le système (KT) devient alors :*

$$(KT) \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} - \lambda p + \mu_x = 0 \\ \dfrac{1}{(R/q+b)^2} - \lambda q = 0 \\ \mu_x \geq 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne la valeur de λ *, puis, en reportant dans la première équation, la condition* $\mu_x \geq 0$ *devient :*

$$\frac{p}{q(R/q+b)^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0 \text{ , c'est à dire } R/q + b \leq a\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \text{ , i.e. } R \leq a\sqrt{p}\sqrt{q} - qb$$

g) En supposant y = 0 à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante

Par symétrie (échanger a et b ainsi que p et q), on obtient x = R/p et la condition $R \leq b\sqrt{p}\sqrt{q} - pa$

h) On suppose maintenant a = p = q = 1 , b = 2 , donner la solution optimale en fonction de R et tracer la courbe décrite par ces points

Les valeurs critiques de R sont $a\sqrt{p}\sqrt{q}-qb=-1$ *et* $b\sqrt{p}\sqrt{q}-pa=1$

On a donc toujours x > 0 (le cas x = 0 vu en f) est impossible avec R > 0) et y sera nul ou > 0 selon que R sera inférieur ou supérieur à 1

Si $R\leq 1$ *, alors y = 0 et x = R . La courbe décrite, lorsque R varie entre 0 et 1 est donc le segment]0 , A] sur l'axe des abscisses, avec 0 = (0 , 0) (R tend vers zéro) et A = (1 , 0) (R = 1)*

Si $R>1$ *, alors* $\begin{cases} x=\dfrac{R+pa+qb}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{p}}-a=\dfrac{R+3}{2}-1=\dfrac{R+1}{2} \\ y=\dfrac{R+pa+qb}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{q}}-b=\dfrac{R+3}{2}-2=\dfrac{R-1}{2} \end{cases}$

Les points obtenus forment la demi-droite y = x – 1 qui démarre au point A = (1 , 0) .

(figure)

Exercice 3.

Soit n un entier ≥ 1 . On considère le programme suivant dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(P)\begin{cases} Max \quad y-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + y \leq R \\ \forall i, x_i > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

où $p_1, \dots, p_n$, R sont des paramètres strictement positifs

a) S'agit-il d'un programme convexe ?

b) Montrer par un argument simple que la contrainte $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + y \leq R$ est saturée à l'optimum

c) Le programme est-il qualifié ?

d) Ecrire le Lagrangien de (P) et les conditions de Kühn et Tücker.

e) En supposant y > 0 à l'optimum, résoudre le programme (P). Quelle condition doit-être alors vérifiée par les paramètres ?

f) En supposant y = 0 à l'optimum, résoudre le programme (P). Donner la condition nécessaire sur les paramètres correspondante

g) Conclure

Correction :

a) La fonction objectif est concave comme somme de fonctions concaves et il s'agit d'un programme de maximisation, le domaine est convexe car défini par des contraintes affines, donc le programme est convexe.

b) La fonction objectif f est strictement croissante en y (comme en chacun de ses autres arguments d'ailleurs). Si la contrainte de budget n'était pas saturée à l'optimum (x^*, y^*), on pourrait trouver un autre point réalisable qui améliore la fonction objectif, à savoir par exemple

$$(x^*, y) \text{ avec } y = R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*$$

On a alors $f(x^*, y) - f(x^*, y^*) = y - y^* = R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* - y^* > 0$ *Contradiction.*

c) Toutes les contraintes sont affines donc le programme est qualifié.

d) Le Lagrangien est

$$L(x, y, \lambda, \mu) = y - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \lambda\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - y\right) + \mu y$$

Et les conditions de Kühn et Tücker s'écrivent

$$(KT)\begin{cases} \forall i,\ \dfrac{1}{x_i^2} - \lambda p_i & = 0 \\ 1 - \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - y\right) & = 0 \\ \mu y & = 0 \\ \lambda & \geq 0 \\ \mu & \geq 0 \end{cases}$$

e) Si $y > 0$, alors $\mu = 0$ d'après la relation d'exclusion correspondante, puis successivement

$\lambda = 1$ *et* $\forall i, x_i = \dfrac{1}{\sqrt{p_i}}$ *, enfin* $y = R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}$

Le point obtenu doit être réalisable et même satisfaire $y > 0$ (notre hypothèse de départ), la condition sur les paramètres est donc $R > \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}$

f) Si $y = 0$, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} \forall i,\ \dfrac{1}{x_i^2} = \lambda p_i \\ R = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \end{cases}$$

En reportant dans la dernière équation on obtient

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}$$

D'où $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{R}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}}$$

et finalement

$$\forall i,\ x_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{p_i}} = \frac{R}{\sqrt{p_i} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}}$$

La condition sur les paramètres vient de la condition $\mu \geq 0$ *, comme*

$$\mu = \lambda - 1 = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}\right)^2}{R^2} - 1$$

la condition est $\sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j} \geq R$

g) Les conditions sur les paramètres trouvées dans les cas e) et f) sont exclusives l'une de l'autre :

si $R \leq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}$ *, on est forcément dans le cas f) avec* $\forall i,\ x_i = \frac{R}{\sqrt{p_i} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}}$ *et* $y = 0$

si $R > \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j}$ *, on est forcément dans le cas e) avec* $\forall i, x_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}}$ *et* $y = R - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}$