Semaine du 29 avril : Intégration

CORRECTION

Exercice 1 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ avec $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x + k$. Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $F'(x) = f(x)$.

2) $g(x) = 3\sqrt{x}$ avec $G(x) = 2 \times x^{\frac{3}{2}} + k$. Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $G'(x) = g(x)$.

3) $h(x) = \frac{3}{(3x-1)}$ avec $H(x) = \ln(3x-1) + k$. Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $H'(x) = h(x)$.

Exercice 2 : Déterminer LA primitive qui prend pour valeur 2 en $x = 1$ pour la fonction : $f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

On commence par déterminer les primitives de la fonction $f(x)$: $F(x) = \sqrt{x^3+1} + k$

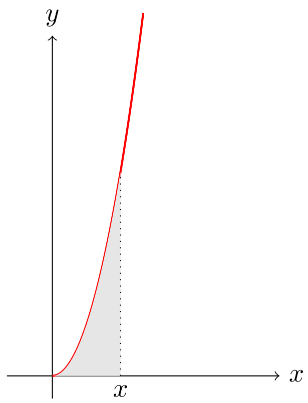
On vérifie en calculant $F'(x) = \frac{1}{2} \times 3x^2 \times (x^3+1)^{\frac{-1}{2}} = \frac{3x^2}{2 \times (x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$

Sachant que $F(1) = 2$, on cherche LA primitive qui prend pour valeur 2 en $x = 1$ en résolvant l'équation suivante : $F(1) = \sqrt{1^3+1} + k = 2 \Rightarrow k = 2 - \sqrt{2}$

Ainsi, LA primitive qui prend pour valeur 2 en $x = 1$ est égale à $F(x) = \sqrt{x^3+1} + 2 - \sqrt{2}$

Exercice 3 : Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t$

$$\int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3} \times t^3\right]_0^x = \left(\frac{1}{3} \times x^3\right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3\right) = \frac{1}{3} \times x^3$$

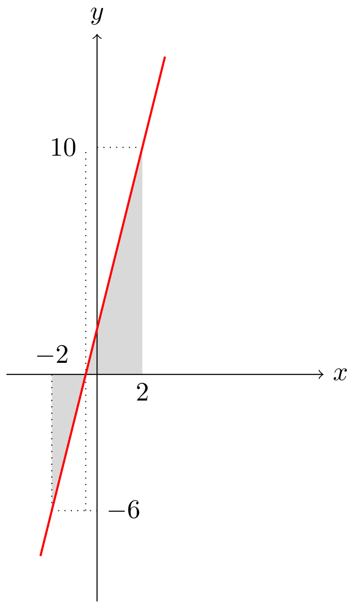


Exercice 4 : Soit $f(x) = 4x + 2$.

1) Calculer l' intégrale $\int_{-2}^{2} (4x+2) \, \mathrm{d}x$

$$\int_{-2}^{2} (4x+2) \, \mathrm{d}x = \left[2x^2 + 2x\right]_{-2}^{2} = 12 - 4 = 8$$

2) Calculer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses.



Quand la fonction est positive ?
$f(x) \geq 0 \Rightarrow 4x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{-1}{2}$

On utilise la relation de Chasles pour calculer cette aire.

$$\int_{-2}^{2} (4x+2)\ \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{-0,5} (4x+2)\ \mathrm{d}x + \int_{-0,5}^{2} (4x+2)\ \mathrm{d}x = -\left[2x^2+2x\right]_{-2}^{-0,5} + \left[2x^2+2x\right]_{-0,5}^{2}$$
$$= -\big((2\times(-0,5)^2 + 2\times(-0,5)) - (2\times(-2)^2 + 2\times(-2))\big) + \big((2\times(2)^2 + 2\times(2)) - (2\times(-0,5)^2 + 2\times(-0,5$$
$$= 4,5 + 12,5 = 17$$

Remarque : on peut vérifier que la surface grisée (triangles rectangles) est bien la somme de la moitié des deux rectangles : $\dfrac{1,5\times 6}{2} + \dfrac{10\times 2,5}{2} = 4,5 + 12,5 = 17$

3) Calculer la valeur moyenne de la fonction entre -2 et 2.
La valeur moyenne de f sur $[-2; 2]$ est :
$$\mu = \frac{1}{2-(-2)} \times \int_{-2}^{2} f\,(x)\,dx = \frac{1}{4} \times \left[2x^2+2x\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4} \times 8 = 2.$$

Exercice 5 : **En utilisant l'intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :**

Pour mémoire : $\displaystyle\int_a^b (u'(x) \times v(x))\,dx = [u\,(x) \times v\,(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) \times v'(x))\,dx$

1) $f(x) = x^2 \times ln(x)$.
$v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = x^2$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

$$F(x) = \int \left(x^2 \times \ln(x)\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln(x)\right] - \int \left(\frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln(x)\right] - \int \frac{x^2}{3} dx$$
$$F(x) = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln(x)\right] - \left[\frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3} \times \left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + k$$

2) $g(x) = x \times e^x$
$v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$ donc $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$.

$$F(x) = \int (x \times e^x)\,dx = [x \times e^x] - \int e^x dx = [x \times e^x] - [e^x] = e^x\,(x-1) + k$$

3) $h(x) = x^2 \times e^x$
$v(x) = x^2$ et $u'(x) = e^x$ donc $v'(x) = 2x$ et $u(x) = e^x$.

$F(x) = \int \left(x^2 \times e^x\right) dx = \left[x^2 \times e^x\right] - \int (2x \times e^x)\, dx$

Afin de calculer $\int (2x \times e^x)\, dx$, on réalise à nouveau une intégration par parties.

$v(x) = 2x$ et $u'(x) = e^x$ donc $v'(x) = 2$ et $u(x) = e^x$.
$\int (2x \times e^x)\, dx = [2x \times e^x] - \int (2e^x)\, dx = [2x \times e^x] - [2e^x]$

Donc, $F(x) = \left[x^2 \times e^x\right] - ([2x \times e^x] - [2e^x]) = e^x \times \left(x^2 - 2x + 2\right) + k$

Exercices supplémentaires

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$
Vous pouvez constater que l'on peut écrire la fonction $h(x)$ de la manière suivante :
$h(x) = x^{-3} - x^{-4}$. Donc, $H(x) = \dfrac{-1}{2} \times x^{-2} + \dfrac{1}{3} \times x^{-3}$

2) $f(x) = \ln(x)$
Cette primitive n'existe pas dans le tableau des primitives. Il faut utiliser une intégration par parties. Avec $f(x) = 1 \times \ln x$.

Comme on sait dériver $\ln x$, on pose : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = 1$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u(x) = x$.

$F(x) = \int (1 \times \ln x)\, dx = [x \times \ln x] - \int \left(x \times \dfrac{1}{x}\right) dx$
$F(x) = \int (1 \times \ln x)\, dx = [x \times \ln x] - \int (1)\, dx$
$F(x) = \int (1 \times \ln x)\, dx = [x \times \ln x] - [x]$
donc, $F(x) = x \times \ln x - x + k$.

Exercice 2 Même exercice que le 4 avec d'autres bornes et/ou une autre fonction.