Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2023-2024

Contrôle continu 2 - Rattrapage

Durée : 1h.

Expliquez votre raisonnement le plus clairement possible, même s'il n'a pas abouti.

Bon courage !

Question de cours

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'on a une base $\{u_1, u_2, u_3\} \subset E$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base $\{v_1, v_2\} \subset F$ de $\mathrm{Im}(f)$.

1. Calculer $\dim(E)$.
2. On suppose que f est surjective. Calculer $\dim F$.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note

$$u_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad u_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3, \quad u_3 = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$$

1. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée. Est-ce une base de E ?
2. En déduire que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$.
3. Soit $\varphi : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que $u_1 - 2u_2 + u_3 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 2

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (3, 4, 5), v_4 = (0, 1, 1)$$

1. Donner une base, la dimension et une équation de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
2. Montrer que $\{v_1, v_2, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans la base (v_1, v_2, v_4).
4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que
$$f(v_1) = (0, 1, 2), f(v_2) = (1, 0, 0), f(v_4) = (0, 0, 0)$$
Donner l'expression de $f(u)$ pour un vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice de f dans la base canonique.
6. Calculer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_4) de deux manières différentes

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f(x, y, z) = (x + y - z + \alpha, -(\alpha + 1)x - 2y + 2z, -2x - 4y + (4 + 2\alpha)z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme ssi $\alpha = 0$.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ? surjective ?

Fin de l'énoncé.