Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
N. Frikha, G. Shornin

Licence L3 MIASHS
Modèles Mathématiques en Finance

Partiel du 21 Mars 2024

durée 1h et 30 minutes

Les notes de cours ainsi que les téléphones portables sont interdits pendant toute la durée de l'épreuve.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (Questions du cours (6 pts)).

On se place dans un modèle binomial à une période avec les conventions vues dans le cours. Les paramètres du modèle sont S_0, b, h et r.

1. (1 pt) Dans ce modèle, qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, où α représente la quantité d'actif risqué à la date 0 dans le portefeuille et β représente la quantité d'argent à la date 0 ?
2. (1 pt) Sous quelle(s) condition(s) sur les paramètres a-t-on absence d'opportunité d'arbitrage dans un tel modèle ?
3. (1 pt) Quelle est la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$? *On explicitera les deux valeurs* $\mathbb{Q}(\{w_h\})$ *et* $\mathbb{Q}(\{w_b\})$.
4. (1 pt) Toujours dans le cas d'un modèle binomial à une période, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ de la question précdente, démontrer que l'actif risqué actualisé est une martingale sous $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{S_1}{1+r}] = S_0.$$

5. Sur le marché, on observe un contrat forward pour l'achat d'une action Société Générale avec date de livraison dans un an. Le prix de livraison aujourd'hui est de 2.5 euros. Le prix de l'action Société Générale est de 3 euros et le taux d'intérêt à un an est égal à $r = 10\%$.
   (a) (1pt) Y a-t-il un arbitrage ?
   (b) (1pt) Si oui, proposez une stratégie d'arbitrage et calculer son gain à la maturité.

Exercice 2 (Modèle binomial à une période (14 pts)).

On se place dans un modèle binomial à une période. Les paramètres du modèle sont les constantes S_0, b, h et r telles que $S_0 > 0$ et $h > r > b > -1$.

1. (1 pt) Rappeler l'expression de l'unique probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ en fonction des paramètres du modèle.
2. (1 pt) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ une stratégie de portefeuille où α représente la quantité d'actif risqué à la date 0 dans le portefeuille et β représente la quantité d'argent à la date 0 dans le portefeuille. On note $V_1^{(\alpha,\beta)}$ la valeur à la date 1 du portefeuille associé à (α, β).
   Montrer que la valeur $V_0^{(\alpha,\beta)}$ du portefeuille à la date 0 est égale à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de $V_1^{(\alpha,\beta)}$ actualisé, cést-à-dire

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{V_1^{(\alpha,\beta)}}{1+r}\Big].$$

3. On considère une option d'échéance $T = 1$ et de payoff $X = f(S_1)$, où S_1 est le prix de l'actif risqué sous-jacent à la date 1 et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction déterministe
   (a) (1 pt) Montrer que la quantité α d'actif risqué à la date 0 dans le portefeuille de couverture de cette option est donnée par

$$\alpha = \frac{f((1+h)S_0) - f((1+b)S_0)}{S_0(h-b)}.$$

(b) (2 pts) On reprend la question précédente pour une option Call et une option Put de strike K. On note α^{call} (resp. α^{put}) la quantité d'actif risqué à détenir dans le portefeuille de couverture pour l'option Call (resp. Put).

Montrer les deux inégalités suivantes

$$0 \leq \alpha^{call} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \alpha^{put} \leq 0.$$

(c) (1 pt) Montrer l'identité suivante

$$\alpha^{call} - \alpha^{put} = 1.$$

(d) (2 pts) Même question pour une option call digitale et une option put digitale de barrière H vérifiant $H \neq (1+h)S_0, (1+b)S_0$. On rappelle que les payoff du Call digitale et du Put digitale sont donnés respectivement par $\mathbf{1}_{S_1 \geq H}$ et $\mathbf{1}_{S_1 \leq H}$.

Montrer les deux inégalités suivantes

$$0 \leq \alpha^{d-call} \leq \frac{1}{S_0(h-b)} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{S_0(h-b)} \leq \alpha^{put} \leq 0.$$

(e) (1 pt) Montrer l'identité suivante

$$\alpha^{d-call} + \alpha^{d-put} = 0.$$

4. Considérons trois options call d'échéance $T = 1$ et de strike K_1, K_2 et K_3 tels que $0 < K_1 < K_3$ et

$$K_2 = \frac{1 \times K_1 + 3 \times K_3}{4}$$

et noterons les prix correspondants C_1, C_2, C_3 à la date 0. A partir de ces trois options, on définit un nouveau produit par la stratégie suivante : à la date 0, on achète une option Call de strike K_1 et trois options call de strike K_3 et on vend quatre options call de strike K_2. Ce produit s'appelle *asymmetric butterfly spread* et on note X son payoff à la date $T = 1$.

(a) (1.5 pts) Montrer que le payoff X de ce produit est toujours positif ou nul.
Indication : considérez les quatre cas possibles
(i) $S_1 < K_1$
(ii) $K_1 \leq S_1 < K_2$
(iii) $K_2 \leq S_1 < K_3$
(iv) $S_1 \geq K_3$

(b) (1.5 pts) En déduire la borne supérieure de non-arbitrage pour C_2 en fonction de C_1 et C_3.

5. Application numérique : $S_0 = 100$, $r = 5\%$, $h = 0.15$, $b = -0.1$, $K_1 = 100$, $K_3 = 108$.

(a) (1pt) En déduire K_2 et calculer les prix à la date 0 de toutes les trois options Call en utilisant le principe d'évaluation risque neutre.

(b) (1pt) En déduire le prix à la date 0, noté π^X, de l'option de payoff X.