Fondements des mathématiques
CC du 9/11/23

Exercice 1 *Déterminer la table de vérité des propositions suivantes*

1. $[p \wedge q] \Rightarrow [p \vee q]$
2. $\underbrace{\underbrace{[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]}_{A} \Rightarrow r}_{B}$

(1)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p\wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Rem La prop (1) est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de p et q : c'est une tautologie

(2)

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	A	B
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V

On note $A := (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

$B := A \Rightarrow r$

Rem La proposition (2) est une tautologie : c'est l'expression logique du raisonnement par disjonction des cas

Exercice 2 *Soit* $B = \{0, 2\}$.

1. *Déterminer* $\mathcal{P}(B)$ → ensemble des sous-ensembles de B
2. *Déterminer* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

1) Rem $Card(B) = 2$ donc $Card(\mathcal{P}(B)) = 2^2 = 4$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, B\}$$

2) $Card(\mathcal{P}(B)) = 4$ donc $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))) = 2^4 = 16$.

si $a \in X$
$\{a\} \subset X$
donc $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) = \{\overset{1}{\emptyset}, \overset{2}{\{\emptyset\}}, \overset{3}{\{\{0\}\}}, \overset{4}{\{\{2\}\}}, \overset{5}{\{B\}}, \overset{6}{\{\emptyset, \{0\}\}}, \overset{7}{\{\emptyset, \{2\}\}}, \overset{8}{\{\emptyset, B\}}, \overset{9}{\{\{0\}, \{2\}\}}, \overset{10}{\{\{0\}, B\}}, \overset{11}{\{\{2\}, B\}}, \overset{12}{\{\emptyset, \{0\}, \{2\}\}}, \overset{13}{\{\emptyset, \{0\}, B\}}, \overset{14}{\{\emptyset, \{2\}, B\}}, \overset{15}{\{\{0\}, \{2\}, B\}}, \overset{16}{\mathcal{P}(B)}\}$$

Exercice 3 *On considère le prédicat sur* $\mathbb{R}_+^*$ *défini par*

$x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad P(x) := \exists n \in \mathbb{N}\ 0 < n < x$ ↪ $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminer (et démontrer) si les propositions suivantes sont vraies ou fausses:

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*\ P(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ P(x)$
3. $x > 2 \Rightarrow P(x)$
4. $P(x) \Rightarrow x > 2$
5. $P(x) \Leftrightarrow x > 1$

$\Leftarrow$ et $\Rightarrow$

1) Montrons que "$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, P(x)$" est vraie, càd
$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, 0 < n < x$

→ on cherche $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tq $0 < n < x$
On peut prendre $x = \pi$ et on a bien $0 < 3 < \pi$
$n = 3$ i.e $0 < n < x$

Donc $P(\pi) : \exists n \in \mathbb{N}, 0 < n < \pi$ est vraie
Donc $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, P(x)$ est vraie.

2) Montrons que "$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P(x)$" est fausse

→ on montre que la négation $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \neg P(x)$ est vraie

avec $\neg P(x) = \neg(\exists n \in \mathbb{N}, 0<n<x)$

$= \forall n \in \mathbb{N}, \neg(0<n<x)$ ⚠ $\neg(0<n<x)$ n'est pas $0 \geq n \geq x$!

$= \forall n \in \mathbb{N}, \neg(0<n$ et $n<x)$

$\neg P(x) = \forall n \in \mathbb{N}, n \leq 0$ ou $n \geq x$

→ On cherche $x \in \mathbb{R}_+^*$ tq, $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 0$ ou $n \geq x$

Prenons $x = \frac{1}{2}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $n = 0$ et $n \leq 0$

soit $n \geq 1$ et alors $n \geq 1 \geq \frac{1}{2} = x$

→ $\neg P(\frac{1}{2})$ est vraie donc "$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \neg P(x)$" est vraie

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P(x)$ est fausse

3) Montrons que $x > 2 \Rightarrow P(x)$ est vraie.

Supposons que $x > 2$, et montrons que $\exists n \in \mathbb{N}, 0<n<x$

→ on cherche $n \in \mathbb{N}$ tq $0<n<x$

On peut prendre $n=1$: on a alors

$0 < n=1 < 2 < x$

Donc on a montré $P(x)$ en supposant $x>2$

Donc $x > 2 \Rightarrow P(x)$ est vraie

4) Montrons que $P(x) \Rightarrow x>2$ est fausse.

càd, on cherche $x \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\neg(P(x) \Rightarrow x>2)$

$\Leftrightarrow P(x) \wedge \neg(x>2)$

$\Leftrightarrow P(x) \wedge (x \leq 2)$

Prenons $x \in]1,2]$, par exemple $x = \sqrt{2} \simeq 1.41...$

Alors $P(\sqrt{2})$ est vraie : si on prend $n=1$, on a bien $n \in \mathbb{N}$

et $0<n<\sqrt{2}$

et $\sqrt{2} \leq 2$ est vraie

→ $P(\sqrt{2}) \wedge (\sqrt{2} \leq 2)$ est vraie

Donc $P(x) \Rightarrow x>2$ est fausse

5) Montrons par double implication que "$P(x) \Leftrightarrow x > 1$" est vraie

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $P(x)$ est vraie.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $0 \leq n < x$

→ $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0 \Rightarrow n \geq 1$

Donc on a $0 < 1 \leq n < x$ Donc $x > 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x > 1$ et montrons $P(x)$

→ on cherche $n \in \mathbb{N}$ tq $0 < n < x$

→ on peut prendre $n = 1$: on a alors $0 < n = 1 < x$.

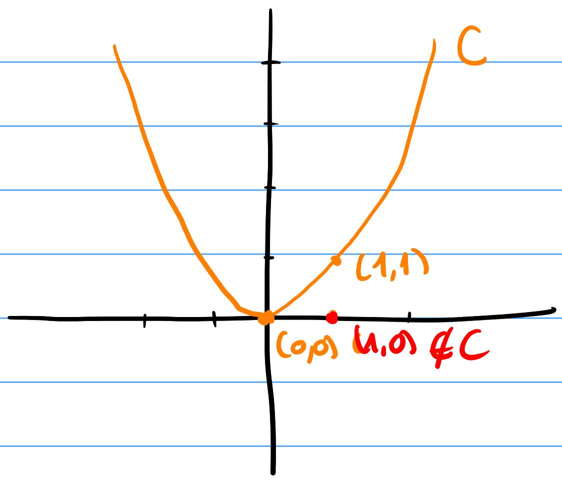
Donc on a bien montré $P(x)$.

→ On a montré que "$P(x) \Leftrightarrow x > 1$" est vraie.

Exercice 4 *Soit* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ → graphe de la fonction $f(x) = x^2$

1. *Représenter* C *graphiquement.*
2. C *peut-il s'écrire sous la forme* $A \times B$ *où* A *et* B *sont des parties de* $\mathbb{R}$ *?*

1)



2) Supposons que $C = A \times B$, $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

- $(0,0) \in C$ donc $0 \in A$ et $0 \in B$
- $(1,1) \in C$ donc $1 \in A$ et $1 \in B$

→ $\left.\begin{array}{l} 1 \in A \\ 0 \in B \end{array}\right\}$ donc $(1,0) \in A \times B$

Mais $(1,0) \notin C$, ce qui contredit $C = A \times B$

→ Il n'existe pas de sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}$ tq $C = A \times B$

Exercice 5 *Soit E et F deux ensembles, A et $\cancel{B}$ C deux parties de E et $\cancel{C}$ B et D deux parties de F. Démontrer que*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

On procède par double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$

Alors $x \in A \times B$ donc il existe $a \in A$, $b \in B$ tq $x = (a,b)$

et $x \in C \times D$ donc il existe $c \in C$, $d \in D$ tq $x = (c,d)$

Donc $(a,b) = x = (c,d)$ donc $a = c \in C$

$b = d \in D$

$\rightarrow a \in A \cap C$ et $b \in B \cap D$

donc $x = (a,b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$

On a donc $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Alors $x = (y,z)$ avec $y \in A \cap C$

$z \in B \cap D$

Mais du coup

- $y \in A \cap C \subset A$
- $z \in B \cap D \subset B$

$\Big\}$ $x = (y,z) \in A \times B$

et
- $y \in A \cap C \subset C$
- $z \in B \cap D \subset D$

$\Big\}$ donc $x = (y,z) \in C \times D$

Donc $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$

$\rightarrow$ On a montré que $(A \cap C) \times (B \cap D) \subset (A \times B) \cap (C \times D)$

Donc, par double inclusion, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$