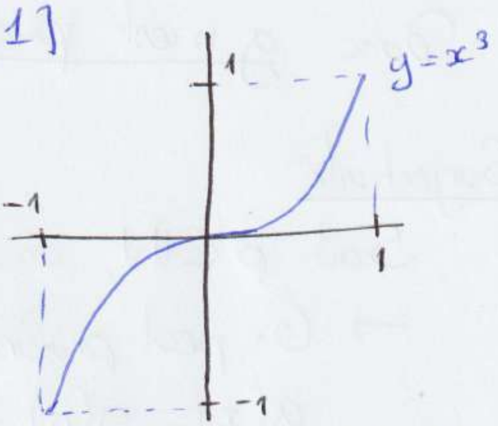
FONDEMENTS DES MATHS
CC DU 19/12/23

Exercice 1

1) $f : x \in [-1,1] \longmapsto x^3 \in [-1,1]$



<u>Injectivité</u> : f est strictement croissante sur $[-1,1]$, donc, $\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$, si $x_1 \neq x_2$

~~si $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1=x_2$~~

alors
- soit $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
- soit $x_2 < x_1$ et $f(x_2) < f(x_1)$, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

→ Dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$

Donc f est injective. ✓

<u>Surjectivité</u> : Soit $y \in [-1,1]$, cherchons $x \in [-1,1]$ tq $y = f(x)$

→ f est continue sur $[-1,1]$, $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$

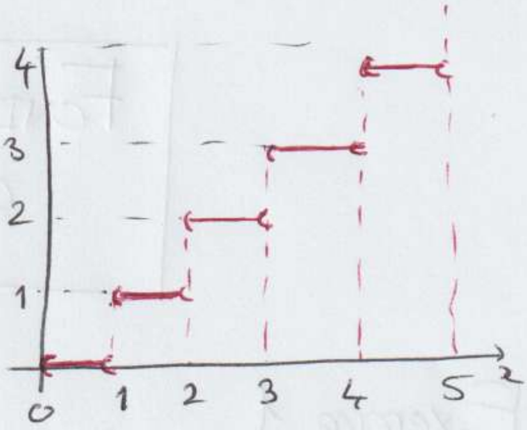
donc il existe $x \in [-1,1]$ tq $y = f(x)$

→ f est surjective ✓

<u>Bijectivité</u> : f est injective et surjective, donc f est bijective ✓

<u>Rq</u> Vous pouviez aussi utiliser la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ pour montrer l'existence d'un unique antécédent pour chaque $y \in [-1,1]$

2) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ (partie entière)
$n \longmapsto E(n)$



Injectivité

$g(1) = 1 = g(1.5)$, mais $1 \neq 1.5$

$\rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+,\ x_1 \neq x_2$ et $g(x_1) = g(x_2)$

Donc g n'est pas injective ✗

Surjectivité

Soit $p \in \mathbb{N}$, on cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tq $g(x) = p$.

$\rightarrow$ On peut prendre $x = p$: on a alors

$g(x) = g(p) = E(p) = p$

Donc, $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R}^+$ tq $g(x) = p$

$\rightarrow$ g est surjective ✓

Bijectivité g est ~~injective~~, surjective mais pas injective

Donc g n'est pas bijective.

3) $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2$

Voir aussi TD5 Ex 2

Injectivité Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$

Supposons que $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, alors $(x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2)$

Donc $\begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 & (L_1) \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 & (L_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 & (L_1) \\ 2x_1 = 2x_2 & (L_1)+(L_2) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = \underbrace{(x_2-x_1)}_{=0} + y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Donc h est injective

Ex 1 (suite)

3) Surjectivité Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $h(x,y)=(a,b)$

càd $\begin{cases} x+y=a & (L_1) \\ x-y=b & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=a & (L_1) \\ 2x=a+b & (L_1)+(L_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=a-x=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2} \\ x=\frac{a+b}{2} \end{cases}$

On a $h\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)=(a,b)$

$\rightarrow \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $h(x,y)=(a,b)$

Donc h est surjective

Bijectivité : h est injective et surjective, donc h est bijective

4) $k: x\in\mathbb{R}\longmapsto (x,2x,3x)\in\mathbb{R}^3$

- Injectivité : Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $k(x_1)=k(x_2)$

On a donc $\begin{cases} x_1=x_2 \\ 2x_1=2x_2 \\ 3x_1=3x_2 \end{cases}$ ... Donc $x_1=x_2$

$\rightarrow$ k est injective

- Surjectivité : Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on cherche $x\in\mathbb{R}$ tq $k(x)=(a,b,c)$. On doit donc avoir

$\begin{cases} x=a \\ 2x=b \\ 3x=c \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=a \\ 2a=b \\ 3a=c \end{cases}$

$\rightarrow$ Mais si $2a\neq b$, ou $3a\neq c$, aucun réel ne remplit ces conditions

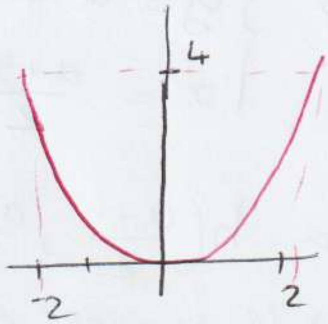
Par exemple, pour $(a,b,c) = (1,1,1)$, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = 1 \\ 3 = 1 \end{cases}$ → contradictoire

Donc $(1,1,1)$ n'a pas d'antécédent par k : <u>k n'est pas surjective</u>

<u>Bijectivité</u> : k est injective, mais pas surjective, donc <u>k n'est pas bijective</u>

<u>Exercice 2</u> $a \in [-2,2]$

$$f : [a,2] \longrightarrow [0,4]$$
$$x \longmapsto x^2$$



1) • Si $a < 0$, alors $a \in [-2,0[$ donc $-a \in]0,2]$ et $f(a) = a^2 = f(-a)$ avec $a \neq -a$
→ Dans ce cas, f n'est pas injective

• Si $a \geq 0$ alors f est strictement croissante sur $[a,2]$
Donc dans ce cas f est injective

cf ex 1(1)

$\boxed{f \text{ est injective ssi } a \geq 0}$

2) • Si $a > 0$ alors $\forall x \in [a,2]$, $x^2 \geq a^2 > 0$
Donc 0 n'a pas d'antécédent par f
→ Dans ce cas, f n'est pas surjective

• Si $a \leq 0$, $f([0,2]) \subset f([a,2])$ donc $[0,4] \subset f([a,2])$
autrement dit ~~[0,4]~~ $[0,4] \subset \{f(x), x \in [a,2]\}$
→ $\forall y \in [0,4]$, $\exists x \in [a,2]$ tq $y = f(x)$: f est surjective

$\boxed{f \text{ est surjective ssi } a \leq 0}$

Ex 2 (suite)

(3) Remarquons que

f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et f surjective
$\Leftrightarrow a \geq 0$ et $a \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{a=0}$

$f : [0,2] \longrightarrow [0,4]$, $x \longmapsto x^2$ est bijective et l'application réciproque est $\boxed{f^{-1} : x \in [0,4] \longmapsto \sqrt{x} \in [0,2]}$

$\rightarrow \forall x \in [0,4],\ f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

$\forall x \in [0,2],\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \underset{x\geq 0}{=} x$

Exercice 3.

1) Soit E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ sous-ensembles de E

alors $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A$ donc $A \mathcal{R} A$
- $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : si $E \neq \emptyset$, on a $\emptyset \subset E$ donc $\emptyset \mathcal{R} E$ mais $E \not\subset \emptyset$ donc $\neg(E \mathcal{R} \emptyset)$

  $\rightarrow \exists A, B \in \mathcal{P}(E)$ tq $A \mathcal{R} B$ et $\neg(B \mathcal{R} A)$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} A$ alors $A \subset B$ et $B \subset A$ donc (double inclusion) $A = B$.
- $\mathcal{R}$ est transitive $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, si $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$ alors $A \subset B$ et $B \subset C$ donc $A \subset C$, donc $A \mathcal{R} C$.

$\rightarrow$ $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique, donc ce n'est pas une relation ~~d'ordre~~ d'équivalence

$\rightarrow$ $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre

$\rightarrow$ Si $x \neq y$ sont 2 points de E, on a $\{x\} \not\subset \{y\}$ et $\{y\} \not\subset \{x\}$

Donc $\exists A, B \in \mathcal{P}(E)$ tq $\neg(A \mathcal{R} B)$ et $\neg(B \mathcal{R} A)$

$\rightarrow$ l'inclusion n'est pas une relation d'ordre total

(2) Ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ ssi $[x_1 < y_1] \vee [(x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)]$

ex $(1, 37) \leq_{lex} (2, 3)$ car $1 < 2$

$(1, 8) \leq_{lex} (1, 12)$ car $(1 = 1) \wedge (8 \leq 12)$

* $\leq_{lex}$ est réflexive : Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

on a $(x_1 = x_1)$ et $(x_2 \leq x_2)$

Donc $(x_1 < x_1) \vee [(x_1 = x_1) \wedge (x_2 \leq x_2)]$

autrement dit $\boxed{(x_1, x_2) \leq_{lex} (x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}$

* $\leq_{lex}$ n'est pas symétrique :

$(\underbrace{1 < 2}_{V}) \vee [\underbrace{(1 = 2) \wedge (37 \leq 3)}_{F}]$ est vrai donc $(1, 37) \leq_{lex} (2, 3)$

et $(\underbrace{2 < 1}_{F}) \vee [\underbrace{\underbrace{(2 = 1)}_{F} \wedge (\underbrace{3 \leq 37}_{V})}_{F}]$ est faux donc $\neg[(2, 3) \leq_{lex} (1, 37)]$

$\rightarrow \exists (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ mais $(y_1, y_2) \not\leq_{lex} (x_1, x_2)$

* $\leq_{lex}$ est antisymétrique :

Soient (x_1, x_2) et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ et $(y_1, y_2) \leq_{lex} (x_1, x_2)$

Alors $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$

et $y_1 < x_1$ ou $(y_1 = x_1$ et $y_2 \leq x_2)$

- si $x_1 < y_1$ alors on ne peut avoir ni $y_1 < x_1$ ni $(x_1 = y_1$ et $y_2 \leq x_2)$ ce qui contredit $(y_1, y_2) \leq_{lex} (x_1, x_2) \longrightarrow$ impossible
- si $y_1 < x_1$ alors, de même, on ne peut avoir $(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ $\longrightarrow$ impossible

Ex 3 (suite)

- On a donc $x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2$ et $y_1 = x_1$ et $y_2 \leq x_2$ | Donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

→ $\leq_{lex}$ antisymétrique

* $\leq_{lex}$ est transitive

Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ et $(y_1, y_2) \leq_{lex} (z_1, z_2)$

Montrons que $(x_1, x_2) \leq_{lex} (z_1, z_2)$

On sait que

$(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2)$ donc $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$

$(y_1, y_2) \leq_{lex} (z_1, z_2)$ donc $y_1 < z_1$ ou $(y_1 = z_1$ et $y_2 \leq z_2)$

4 cas possibles

1. Si $x_1 < y_1$ et $y_1 < z_1$ alors $x_1 < z_1$
   Donc $(x_1 < z_1)$ ou $((x_1 = z_1)$ et $(x_2 \leq z_2))$ est vrai
2. Si $x_1 < y_1$ et $(y_1 = z_1$ et $y_2 \leq z_2)$ alors $x_1 < z_1$
   Donc $(x_1 < z_1)$ ou $(x_1 = z_1$ et $x_2 \leq z_2)$ est vrai
3. Si $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $(y_1 < z_1)$ alors $x_1 < z_1$
   Donc $(x_1 < z_1)$ ou $((x_1 = z_1)$ et $(x_2 \leq z_2))$ est vrai
4. Si $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$ et $(y_1 = z_1$ et $y_2 \leq z_2)$ alors
   $x_1 = z_1$ et $x_2 \leq z_2$ donc $((x_1 < z_1)$ ou $(x_1 = z_1$ et $x_2 \leq z_2)$ est vrai

→ Dans tous les cas, on trouve que $(x_1, x_2) \leq_{lex} (z_1, z_2)$
Donc $\leq_{lex}$ est transitive.

- $\leq_{lex}$ n'est pas symétrique donc <u>ce n'est pas une relation d'équivalence</u>
- $\leq_{lex}$ est réflexive, antisymétrique et transitive donc c'<u>est une relation d'ordre</u>
- $\leq_{lex}$ <u>est une relation d'ordre total</u> : $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

  * soit $x_1 < y_1$ donc $(x_1,x_2) \leq_{lex} (y_1,y_2)$
  * soit $y_1 < x_1$ donc $(y_1,y_2) \leq_{lex} (x_1,x_2)$
  * soit $x_1 = y_1$ et dans ce cas on a soit $x_2 \leq y_2$ et $(x_1,x_2) \leq_{lex} (y_1,y_2)$
    soit $y_2 \leq x_2$ et $(y_1,y_2) \leq_{lex} (x_1,x_2)$

$\rightarrow$ Dans tous les cas, on a $(x_1,x_2) \leq_{lex} (y_1,y_2)$ ou $(y_1,y_2) \leq_{lex} (x_1,x_2)$

3) $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$

<u>$\sim_f$ est réflexive</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$ donc $x \sim_f x$

<u>$\sim_f$ est symétrique</u> : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, si $x \sim_f y$ alors
$f(x) = f(y)$ donc $f(y) = f(x)$ donc $y \sim_f x$

<u>Antisymétrie</u> : • si f est injective, alors $\forall x,y \in \mathbb{R}$
$x \sim_f y \iff f(x) = f(y) \implies x = y$ donc f antisymétrique
• si f n'est pas injective, alors il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$
tq $f(x_0) = f(y_0)$ donc $x_0 \sim_f y_0$ et $f(y_0) = f(x_0)$ donc $y_0 \sim_f x_0$
mais $x_0 \neq y_0$ $\rightarrow$ f n'est pas antisymétrique

Donc $\boxed{f \text{ est antisymétrique ssi } f \text{ est injective}}$

• <u>$\sim_f$ est transitive</u> : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, si $x \sim_f y$ et $y \sim_f z$
alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ donc $f(x) = f(z)$
donc $x \sim_f z$.

Ex 3 (suite)

- Quelle que soit f, $\sim_f$ est réflexive, symétrique et transitive donc $\sim_f$ est une relation d'équivalence

- Si f est injective, alors $\sim_f$ est réflexive, antisymétrique et transitive donc $\sim_f$ est une relation d'ordre dans ce cas

Mais alors, comme f est injective, f n'est pas constante

donc $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tq $f(x) \neq f(y)$ donc $\neg(x \sim_f y)$
et $\neg(y \sim_f x)$

Exercice 4

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \sim y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

1) Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive

Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 - x^2 = 0$
$x - x = 0$

donc $x^2 - x^2 = x - x$ donc $x \sim x$ ✓

Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \sim y$. Alors

$x^2 - y^2 = x - y \xrightarrow[\times(-1)]{\text{donc}} y^2 - x^2 = y - x$ donc $y \sim x$ ✓

Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors

$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \quad (L_1) \\ y^2 - z^2 = y - z \quad (L_2) \end{cases}$ donc $(x^2 - \cancel{y^2}) + (\cancel{y^2} - z^2) = (x - \cancel{y}) + (\cancel{y} - z)$ $(L_1) + (L_2)$

càd $x^2 - z^2 = x - z$

donc $x \sim z$ ✓

$\rightarrow$ $\sim$ est bien une relation d'équivalence

2) La classe d'équivalence de 1 est l'ensemble des réels en relation avec 1

$$\mathcal{R}_1 = \{y \in \mathbb{R},\ 1 \sim y\}$$

Or $1 \sim y \iff 1^2 - y^2 = 1 - y \iff 1 - y^2 = 1 - y$

$$\cancel{\iff (1-y)(1+y) = (1-y)}$$

$$\cancel{\iff (1-y)(1+y) - (1-y) = 0}$$

$$\cancel{\iff (1-y)(1+y-1) = 0}$$

$$\cancel{\iff (1-y)y = 0 \iff}$$

$$\iff \cancel{1} - y^2 - \cancel{1} + y = 0 \iff y - y^2 = 0$$

$$\iff y(1-y) = 0 \iff y = 1 \text{ ou } y = 0.$$

Donc $\boxed{\mathcal{R}_1 = \{0, 1\}}$

3) Soit x un réel fixé. Alors la classe d'équivalence de x est

$$\mathcal{R}_x = \{y \in \mathbb{R},\ x \sim y\}$$

Or $x \sim y \iff x^2 - y^2 = x - y$

$$\iff (x-y)(x+y) = x - y$$

$$\left.\begin{array}{l} \iff (x-y)(x+y) - (x-y).1 = 0 \\ \iff (x-y)(x+y-1) = 0 \end{array}\right\} \text{ on met } (x-y) \text{ en facteur}$$

$$\iff y = x \text{ ou } x + y - 1 = 0$$

$$\iff y = x \text{ ou } y = 1 - x$$

Donc $\boxed{\mathcal{R}_x = \{x, 1-x\}}$