Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
Ufr 27 Mathématiques et Informatique
L1 MIASHS 2019-2020

Fascicule de travaux dirigés de fondement des mathématiques

contact: antoine.mandel@univ-paris1.fr

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 1: Calcul propositionnel

Exercice 1. Soit p la proposition “il fait froid” et q “il pleut.” Donner l'énoncé en language naturel des propositions suivantes.:

1. $\neg p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \Leftrightarrow q$
5. $p \Rightarrow \neg q$
6. $q \ \vee \ \neg p$
7. $\neg p \ \wedge \ \neg q$
8. $p \Leftrightarrow \neg q$
9. $(p \ \wedge \ \neg q) \Rightarrow p$

Exercice 2. Soit p la proposition “ce chien est petit” et q “ ce chien est gris.” écrire chacune des propositions suivantes sous forme symbolique en utilisant p et q.

1. ce chien est petit et gris
2. Ce chien est grand et gris
3. Il est faux que ce chien soit petit ou gris
4. Ce chien est petit ou il est grand et gris
5. Ce chien n'est ni vêtit ni gris.

Exercice 4. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes:

1. Si $3 + 2 = 7$ alors $4 + 4 = 8$
2. Il est faux que $2 + 2 = 5$ si et seulement si $4 + 4 = 10$
3. Paris est en Angleterre ou Venise n'est pas en Italie.
4. Il est faux que $1 + 1 = 3$ ou $2 + 1 = 3$
5. II est faux que si Paris est en Angleterre alors Londres est en France.

Exercice 5. Déterminer la négation des propositions suivantes:

1. Il est grand et beau
2. Il n'est ni riche ni heureux
3. Si elle vient elle parlera avec toi.
4. ni Marc ni Eric ne sont joyeux.
5. Si Marc est triste, alors Marie et Jean sont heureux.
6. Marc ou Eric sont élégants et Marie est grande.

Exercice 6. Déterminer la table de vérité des propositions suivantes puis déterminer leur négation.

1. $\neg(p) \wedge q$
2. $\neg(q) \Rightarrow \neg(p)$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
4. $\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \Leftrightarrow q)$
5. $(\neg(p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge r)$

Exercice 7 Démontrer que les propositions suivantes sont des tautologies (i.e qu'elles sont vraies indépendamment de la valeur de vérité des propositions constituantes):

1. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
2. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
3. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
4. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
5. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
6. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
7. $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Exercice 8. Démontrer que les propositions suivantes sont des tautologies (si non démontrées en cours):

1. Raisonnement par contraposée: $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow \ [\neg q \Rightarrow \neg p]$
2. Raisonnement par l'absurde: $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
3. Raisonnement par disjonction des cas: $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$
4. Transitivité de l'implication: $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$
5. Raisonnement par double implication: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow q]$

Exercice 9. Soit P, Q, R des propositions. Indiquer si les propositions suivantes sont toujours vraies, toujours fausses, ou si leur valeur dépend de celles de P, Q, R.

1. $[P \vee (Q \wedge R)] \wedge (Q \vee R)$.
2. $[Q \Rightarrow P] \wedge \neg(P \Leftrightarrow Q) \wedge (R \wedge \neg P)$.
3. $(\neg P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 2: Calcul des prédicats

Exercise 1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes:

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 - 2x + 1 = 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 + x + 1 = 0$
3. $\exists x \in \mathbb{C}\ x^2 + x + 1 = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ |x| = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+\ |x| = x$
6. $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}\ x \geq y$
7. $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\ x \geq y$
8. $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}\ n > x\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \exists n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n} < x$

Exercise 2. Déterminer la négation des propositions précédentes.

Exercise 3. Soit $p(x, y, z)$ un prédicat sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, déterminer les relations logiques entre les proposition suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ p(x, y, z)$
2. $\exists z \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ p(x, y, z)$
3. $\forall y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ p(x, y, z)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ p(x, y, z)$

Exercice 5. Ecrire les négations des phrases suivantes (on ne demande pas évidemment de simplement faire précéder la phrase d'un $\neg$) :

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \tau \in [a, a + \ell],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t + \tau) - f(t)| \leq \varepsilon.$

2. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
3. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que pour tout entier z, la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.

Exercice 6. On associe au nombre réel $x \in \mathbb{R}$ la proposition:

$$P(x) := \forall y \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ x^n \geq y$$

1. Donner un exemple de réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ soit vraie (justifier votre réponse).
2. Déterminer la négation $Q(x)$ de $P(x)$. Donner un exemple de réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x)$ soit vraie (justifier votre réponse).
3. Déterminer si les proposition suivantes sont vraies ou fausses (justifier vos réponses):
   (a) $\exists x \in \mathbb{R} \ P(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} \ P(x)$
   (c) $\forall x \geq 1 \ P(x)$
   (d) $x > 1 \Rightarrow P(x)$
   (e) $P(x) \Rightarrow |x| \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Montrer que l'assertion :

1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ est vraie.
2. $\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq N, \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ est fausse.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 3: Théorie des ensembles

Exercice 1.
Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Déterminer $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ et $A \cup A$

Exercice 2.
Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, et $C = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ and$A \cap A$
2. Déterminer $(A \cap B) \cap C$ and $A \cap (B \cap C)$.

Exercice 3.

1. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ x = 2y\} = ?$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 40\} \cap (\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ x = 3y\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ x = 4y\}) = ?$

Exercice 4. Dire si les affirmations ont un sens et sont justes, et si non, les corriger de sortes qu'elles le deviennent :

1. $1 \in \{1; 2\}$.
2. $1 \subset \{1; 2\}$.
3. $1 \in \{\{1\}, 2\}$.
4. L'ensemble $\emptyset$ a zéro élément.
5. $\emptyset = \{\emptyset\}$.
6. L'ensemble $\{\emptyset, \emptyset\}$ a un élément.

Exercice 5. Soit Ω un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de Ω.

1. Démontrer que si $A \cup B \subset A$ alors $B \subset A$.
2. Démontrer que si $A \cup B = A \cap C$ alors $B \subset A \subset C$.
3. Démontrer que si $A \cup B = A \cup C$ et si $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$.

Exercice 6. Démontrer les propriétés suivantes (sauf celles déjà démontrées en cours)

- Idempotence:

$$A \cup A = A \qquad\qquad A \cap A = A$$

- Associativité:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Commutativité:

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

- Distributivité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Elément neutre

$$A \cup \emptyset = A \qquad\qquad A \cap U = A$$

- Elément absorbant

$$A \cup U = U \qquad\qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- Lois du complémentaire

$$A \cup A^c = U \qquad\qquad A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A \qquad\qquad U^c = \emptyset$$

- Lois de Morgan

  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Exercice 7. On suppose que U est l'ensemble de tous les ensembles et on pose

$$A = \{x \in U \mid x \notin x\}.$$

1. Montrer qu'on ne peut avoir $A \in A$.
2. Montrer qu'on ne peut avoir $A \notin A$.
3. Qu'en déduisez-vous sur l'ensemble de tous les ensembles ?

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 4: Théorie des ensembles (suite)

Exercice 1.
Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Déterminer A/B, A/C, B/C andA/A

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles. Démontrer que:

1. $(A - B) \cap B = \emptyset$
2. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
3. $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
4. $(A - B) = (B - A)$ if and only if $A = B$

Exercice 3 Soient $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, and $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Déterminer les complémentaires dans U suivants: A^c B^c C^c $(A \cup B)^c$ and $(A \cap C)^c$

Exercice 4 Quel est le complémentaire de l'ensemble des entiers positifs pairs dans l'ensemble des entiers positifs ? Dans l'ensemble des entiers relatifs ?

Exercice 5 Soient A et B deux ensembles. Montrer que

$$A^c - B^c = B - A$$

Exercice 6 Soient A et B deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$.Montrer que:

$$A \cup B^c = B^c$$

Exercice 7.

1. Soit $A = \{0, 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A)$
2. Soit $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\}$. Déterminer $\mathcal{P}(B)$
3. Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice 8 Soit E un ensemble tel que $\operatorname{Card} E = n$, où $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence sur n que $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Exercice 9
Soit E un ensemble et $\mathcal{Q}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{Q}^2$, $(A \Delta B \in \mathcal{Q}, A \cap B \in \mathcal{Q})$
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{Q}^2$, $(A \Delta B \in \mathcal{Q}, A \cup B \in \mathcal{Q})$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{Q}^2$, $(A/B \in \mathcal{Q}, A \cup B \in \mathcal{Q})$

N.B: A/B est la différence ensembliste et $A \Delta B$ la différence symétrique de A et B : $A \Delta B := (A/B) \cup (B/A)$.

Exercice 10. Soient $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Déterminer:

1. $A \times (B \cup C)$
2. $(A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C)$
4. $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercice 11. Représenter dans un repère cartésien l'ensemble:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\} \times \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

Exercice 12. Démontrer que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Exercice 13. Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui ne soit pas de la forme $A \times B$ où A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 5: Fonctions

Exercice 1 On définit deux fonctions $f, g : [0,1] \to [0,1]$ par:

- $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 3x-2 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 Déterminer si les applications suivantes sont injectives, bijectives, surjectives.

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n-1$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{1,2\})$, $f^{-1}(\{1,2,3,4\})$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer $g^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}(\{1,2\})$, $g^{-1}(\{1,2,3,4\})$.
2. g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $h^{-1}(\{0\})$, $h^{-1}(\mathbb{R})$.

2. h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y$.

1. Montrer que f n'est pas injective. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$.

2. Montrer que f est surjective, et que l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x, x^2 + y)$ est une bijection.

3. Trouver une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des applications. Montrer que

- $g \circ f$ injective implique f injective.
- $g \circ f$ surjective implique g surjective.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 6: Fonctions (suite)

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Montrer que f est une bijection.

Exercice 2 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 3 Soient E un ensemble,et A et B deux parties de E. On pose:

$$\begin{array}{cccc} f & : & :\mathcal{P}(E) & \to & :\mathcal{P}(A)\times:\mathcal{P}(B) \\ & & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Exercice 4 Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x, y dans E on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

Exercice 5. Donner des exemples de familles d'ensembles indicées par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.

Exercise 6. Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille d'ensembles indicée par $\mathbb{N}$ définie par $D_n =]0, n[$. Déterminer:

1. $D_3 \cup D_7$
2. $\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i$
3. $D_3 \cap D_{20}$
4. $\cap_{i\in\mathbb{N}} D_i$

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 7: Relations

Exercice 1

1. Dessiner le graphe des relations suivantes dans $\mathbb{R}$: $\geq, \leq, >, <$.

2. De quell relation binaire dans $\mathbb{R}$ la droite $y = x$ est-elle le graphe ?

3. Graphiquement, quelle propriété a le graphe d'une relationbinaire dans $\mathbb{R}$ qui est which is réflexive ? symétrique? anti-symétrique ?

Exercice 2 Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Sur X on considère la relation dont le graphe est l'ensemble G suivant : $G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 3

1. Donner un exemple de relation à la fois symétrique et anti-symétrique.

2. Soit E un ensemble fini ayant n éléments. Combien y a-t-il de relations sur E qui soient à la fois symétriques et anti-symétriques ?

Exercise 4. Les relations suivantes sont elles réflexive? transitive? symétrique? anti-symétrique ?

1. Dans $\mathbb{N}$, $a\mathcal{R}b$ si et seulement si a *divise* b

2. Dans $\mathcal{P}(E)$, la relation d'inclusion.

3. Dans $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}$ si et seulement si $|x| = |y|$

4. Dans $\mathcal{P}(E)$, la relation$A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

5. Dans $\mathbb{R}$, the relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $u(x) > u(y)$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Dans $\mathbb{R}$, the relation $x\mathcal{R}y$si et seulement si $u(x) \geq u(y)$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
7. Dans $\mathbb{R}$, the relation $x\mathcal{R}y$si et seulement si $u(x) \geq u(y)$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.
8. Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0\}$, la relation $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$si et seulement si $ad - bc = 0$

Exercise 5. Les relations précédentes sont-elles des relations d'équivalence ? Des relations d'ordre ?

Exercise 6. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre totales sur E telles que

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y$$

Montrer que $\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{S}y$

Exercise 7. Soit $\pi(E)$ l'ensemble des partitions de E et $\mathcal{R}$ la relation dans $\pi(E)$ définie par

$$\pi_1 \mathcal{R} \pi_2 \Leftrightarrow \forall P_1 \in \pi_1 \exists P_2 \in \pi_2, P_1 \subset P_2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $\mathcal{R}$?

Exercise 8. Soit E un ensemble ordonné tel que tout sous ensemble majoré de E admet une borne supérieure. Montrer que tout ensemble minoré de E admet une borne inférieure.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 8: Nombres entiers

On rappelle les axiomes de Peano:

Axiome: 1 (de Peano) *Il existe un ensemble appelé ensemble des entiers naturels est noté* $\mathbb{N}$, *un élément* $0 \in \mathbb{N}$ *appelé zéro et une application* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *appelée successeur, vérifiant les propriétés suivantes:*

1. $0 \notin s(\mathbb{N})$ *(0 n'est le successeur d'aucun entier).*
2. s *est injective (deux entiers ayant le même successeur sont égaux)*
3. *Si* $A \subset \mathbb{N}$ *est telle que* $0 \in A$ *et* $\forall n \in A$ $s(n) \in A$ *alors* $A = \mathbb{N}$ *(principe de récurrence).*

Exercice 1 Quels axiomes de Peano l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, muni de la fonction successeur s définie par $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ et $s(3) = 0$ ne vérifie-t-il pas ?

Exercice 2
Donner un exemple d'ensemble muni d'une fonction successeur qui vérifie tous les axiomes de Peano sauf l'axiome de récurrence.

Exercice 3 Monter que tout entier est pair ou impair, i.e que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ (n = 2 * p \vee n = 2 * p + 1)$$

Exercice 4

1. En considérant l'ensemble des entiers multiples de $a \geq 1$ et $b \geq 1$, montrer que $\text{ppcm}(a, b)$ existe
2. Démontrer que $\text{ppcm}(a, b)$ est unique.

Exercice 5 Montrer qu'il existe une infinité de nombre de premiers.
N.B on pourra considérer $P! + 1$ si P est le plus grand nombre premier.

Exercice 6 Soient $a = 2088$ et $b = 504$, donner la décomposition en facteurs premiers de a et b puis leur pgcd et ppcm.

Exercice 7 Soit $n \geq 1$,. Déterminer le reste dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers.

Exercice 8
Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 9: Nombres réels

Exercice 1
Déterminer l'écriture décimale de la fraction 2/7 et vérifier qu'elle devient périodique.

Exercice 2 Déterminer la fraction correspond au développement décimal $22,75\ 358\ 358\ 358....$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout réel x et pour tout rationnel y, x est rationnel si et seulement si $x+y$ est rationnel.
2. En déduire que l'ensemble $\{y+\sqrt{2},\ y \in \mathbb{Q}\}$ est infini.
3. En déduire que l'ensemble des irrationnels est infini.

Exercice 4 Déterminer lorsque cela est possible les bornes inférieures et supérieures, ainsi que les maxima et minima des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A_1 = [-1,3];\ A_2 =]-12,-3] \cup \{1\};\ A_3 = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } A_4 = \left\{\frac{\ln(x)}{x},\ x > 0\right\}.$$

Exercice 5 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on pose $B = -A := \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ b = -a\}$, c'est-à-dire $b \in B$ si et seulement si $-b \in A$.

- Montrer que A est majoré si et seulement si B est minoré. Montrer que A est minoré si et seulement si B est majoré.
- Montrer que γ est un minorant de A si et seulement si $-\gamma$ est un majorant de B.

- En déduire (en se basant sur l'axiome de la borne supérieure) que si A est minoré, l'ensemble des minorants de A possËde un plus grand élément qui sera noté $\inf(A)$. Montrer que $\inf A = -\sup B$.

Exercice 6 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, dont la borne inf vaut α. On suppose que $\alpha \notin A$, montrer que A ne possède pas de plus petit élément.

Exercice 7

1. Donner un exemple de sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ n'ayant pas de plus grand élément.
2. Existe-t-il des sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$ n'ayant pas de borne inférieure?
3. Donner un exemple de sous-ensemble infini et dénombrable de $\mathbb{R}$ n'ayant pas de borne inférieure.
4. Donner un exemple de sous-ensemble infini et dénombrable de $\mathbb{R}$ ayant une borne inférieure.
5. Donner un exemple de sous-ensemble infini et dénombrable de $\mathbb{R}$ ayant un plus petit et un plus grand élément

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

TD 10: Nombres réels (suite)

Exercice 1 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall(a,b) \in A \times B,\ a \leq b$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 2 Soit A et B deux parties majorées et non vides de $\mathbb{R}$. On définit $A+B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que A, B, $A+B$ admettent des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$ et que

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, déterminer $\inf_{\mathbb{R}_+} f$ et $\sup_{\mathbb{R}_+} f$.
2. Soit $g : \mathbb{R}/\{-2\} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, déterminer $\inf_{\mathbb{R}} g$ et $\sup_{\mathbb{R}} g$.
3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(e^x)$, déterminer $\inf_{\mathbb{R}} h$ et $\sup_{\mathbb{R}} h$.
4. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $k(x) = \tan(x^2)$, déterminer $\inf_{\mathbb{R}} k$ et $\sup_{\mathbb{R}} k$.

Exercice 4 Soit X un ensemble non vide et f et g deux applications bornées de X dans $\mathbb{R}$. Comparer $\sup_X(f+g)$ et $\sup_X f + \sup_X g$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer que $\sup_X(f-g) \geq \sup_X f - \sup_X g$. A-t-on $\sup_X(f-g) \geq |\sup_X f - \sup_X g|$

Exercice 5 Soit A, B et C trois ensembles de réels, non vides et bornés, et soit f et g des applications bijectives telles que $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Déterminer $\sup g \circ f$ en fonction de $\sup f$ et $\sup g$.

Exercice 6 Soient $x, y \in \mathbb{R}$, Démontrer les inégalités suivantes:

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
3. $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$