L1 MIASHS 2014/2015
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Examen de fondements des mathématiques (durée : 2h)
Justifiez toutes vos réponses. Barème : environ 1,5 point par question.

Exercice 1 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles suivants :

1. $E = \{1, 2, 3\} \cup \{\emptyset\}$
2. $F = \{1, \{1\}, \mathbb{N}\}$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$
2. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3 Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ? des relations d'équivalence ?

1. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $A\mathcal{R}B$ si $\min A \leq \min B$.
(où $\min X$ désigne le minimum de l'ensemble X).
2. La relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{N}$ définie par $p\mathcal{S}q$ si p divise q.

Exercice 4

1. Déterminer le développement décimal de $\dfrac{17}{7}$.
2. Déterminer le nombre rationnel dont le développement illimité est $1357,135713571357\cdots 1357\cdots$

Exercice 5 Déterminer, si elle existe, la borne supérieure des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants.

1. $A = \{1 - \dfrac{1}{n+1} \mid n \ \in \mathbb{N}\}$

2. $B = \mathbb{N}$
3. $C = \{-x^2 + 2x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $f(\mathbb{R})$ admette un maximum M et $g(\mathbb{R})$ un minimum m.

1. Que peut-on dire de $\sup f$ et de $\inf g$?
2. Montrer que $\sup \dfrac{f}{g}$ existe et que $\sup \dfrac{f}{g} \leq \dfrac{\sup f}{\inf g}$.
3. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

L1 MIASHS 2014/2015
Université Paris 1

Interrogation de fondements des mathématiques (durée : 100 min)

Questions de cours

1. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles indiquées par $\mathbb{N}$. Donner la définition de $\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et de $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$
2. Pourquoi le développement décimal d'un nombre rationnel est-il périodique ?

Exercice 1 On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ définie par $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si et seulement si $ad - bc = 0$.

1. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? anti-symétrique ?
2. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ? Une relation d'équivalence ?

Exercice 2 Soit E un ensemble. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre totale ?

Exercice 3

1. On considère la fonction $f :]1, 2] \to [1, +\infty[$ définie pour tout $x \in]1, 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Montrer que f est bijective.
2. Déduire de ce qui précède qu'il existe une bijection $g :]0, 2] \to \mathbb{R}_+$
3. On considère la fonction $h : [0, 2] \to [0, 1]$ définie pour tout $x \in [0, 2]$ par $h(x) = \dfrac{x}{2}$. Montrer que h est bijective.
4. Montrer qu'il existe une bijection $k : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.