

Examen de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1
(session de juin 2016, durée : 1h45)

Exercice 1 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles suivants :

1. $E = \{1, \{2, 3\}\}$
2. $F = \{1, 2, 3\}$
3. $G = \{\emptyset, 2, 3\}$

Exercice 2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier vos réponses)

1. $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Q} \ y^2 = x$
2. $\forall A \subset \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall n \in A \ n \leq M$

Exercice 3 On considère la relation \geq_n définie sur \mathbb{R}^n par

$$x \geq_n y : \forall i = 1 \cdots n \ x_i \geq y_i$$

1. Montrer que \geq_n est une relation d'ordre.
2. Est-elle totale ?

Exercice 4 Soit E l'ensemble de tous les ensembles. On note alors :

$$A = \{x \in E \mid x \notin x\}$$

1. Montrer que $A \in A \Rightarrow A \notin A$.
2. Montrer que $A \notin A \Rightarrow A \in A$.
3. Conclure

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles finis. On suppose qu'il existe $f : E \rightarrow F$ injective.

1. Montrer que E et $f(E)$ ont le même nombre d'éléments
2. On suppose qu'il existe également $g : F \rightarrow E$ injective. En déduire que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.
3. Montrer alors que f est bijective.

N.B : On rappelle que $\text{card}(A)$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble A