

Interrogation de fondements des mathématiques (durée 100 minutes)

Questions de cours

1. Donner un exemple de développement décimal correspondant à un nombre irrationnel.

Exercice 1

Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence? d'ordre? totale?

1. La relation sur \mathbb{R} définie par $x\mathcal{R}y$ si $\exists n \in \mathbb{Z} x = n + y$.
2. La relation sur \mathbb{R} définie par $x\mathcal{S}y$ si $\exists n \in \mathbb{N} x = n + y$.

Exercice 3 Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = n^2$

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0$.
Expliquer pourquoi on a nécessairement $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \geq 0$ (la réponse peut être courte).
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > 0$
A-t-on nécessairement $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) > 0$? (Justifier votre réponse).