L1 MIASHS 2015/2016
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Examen de fondements des mathématiques (durée : 2h)

Exercice 1 (1 point par question)

1. Soient E et F deux ensembles, démontrer que :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Rightarrow E = F$$

2. Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, montrer que :

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

3. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x| \mid x \in A\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? (0.75 points par réponse correcte et justifiée).

1. Si A est majoré alors B est majoré
2. 0 est un minorant de B.
3. B possède toujours une borne inférieure finie.
4. B possède toujours une borne supérieure finie.
5. A est bornée si et seulement si B est majorée.
6. Si A est un intervalle, alors B est un intervalle.
7. Si B est un intervalle, alors A est un intervalle.
8. Si A est un intervalle fermé, alors B est un intervalle fermé.

Exercice 3 On considère les fonctions suivantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? (1 point par fonction)

1. $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2. $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
3. $h(n) = n^2$

Exercice 4 Soient E un ensemble fini contenant au moins deux éléments, et x un élément fixé de E. Les relations $\mathcal{R}$ définies par les assertions suivantes sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$? (1 point par réponse correcte et justifiée)

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\quad A\mathcal{R}B \iff A = B$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\quad A\mathcal{R}B \iff A \subset B$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\quad A\mathcal{R}B \iff (x \in (A \cap {}^c\!B))$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\quad A\mathcal{R}B \iff (x \in (A \cup {}^c\!B))$.
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\quad A\mathcal{R}B \iff \Big((A = B) \vee (x \in A \cap {}^c\!B)\Big)$.

Exercice 5 Les développements décimaux suivants correspondent-ils à des rationnels ? Si oui, déterminer le rationnel correspondant. (1 point par question)

1. $0,1010101010...$
2. $0,101101101101101...$
3. $0,10110111011110111110...$