L1 MIASHS 2016/2017
Université Paris 1

Interrogation de fondements des mathématiques

(durée 120 minutes, recto verso)

Exercice 1 Soient p et q des propositions. Donner la table de vérité de la proposition $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Exercice 2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier vos réponses)

1. $\exists z \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ z \in [x, y]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ z \in [x, y]$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ z \in [x, y]$

Exercice 3 Soient A, B, C trois ensembles. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
2. Si $A \cup B = B \cap C$ alors $A \subset B \subset C$.
3. Si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = B \cup C$ alors $B = C$.

Exercice 4 Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$. On définit alors l'application $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ par :

$$\forall X \subset A,\ F(X) = f(X)$$

Montrer que f est injective si et seulement si F est injective.

Exercice 5 Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$? Si oui, sont-elles totales ?

1. $x\mathcal{R}y$ définie par $x^4 \geq y^4$
2. $x\mathcal{S}y$ définie par $f(x) \geq f(y)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante.
3. $x\mathcal{T}y$ définie par $g(x) \geq g(y)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
4. $x\mathcal{U}y$ définie par $x \geq y - 1$

Exercice 6 Déterminer, si ils existent, les minimas, maximas, bornes supérieures et inférieures des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$.

1. $A = \mathbb{Q}$
2. $B = \mathbb{N}$
3. $C =]-1, 3[$
4. $D = \{\frac{1}{n^2+n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$
5. $E = \{x^3 \exp(-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$