

Examen de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1
(session de juin 2017, durée : 110 minutes, justifier toutes vos
réponses)

Exercice 1

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\forall \epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(y)| < \epsilon$
2. $\forall n \in 2\mathbb{N} (n \geq 3 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{P} \exists q \in \mathbb{P} n = p + q)$

3. $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers et \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et la proposition 2. ci-dessus est appelé la conjecture de Goldbach. Donnez-en un énoncé en langage naturel (i.e en Français ou dans une autre langue que vous maîtrisez).

Exercice 2 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses (vous pouvez vous référer au cours) :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n + 1$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} x < z < y)$

Exercice 3 Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que : $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 4

1. Donner un exemple de relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
2. Donner un exemple de relation sur \mathbb{R} qui soit à la fois symétrique et anti-symétrique.
3. La relation sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ si et seulement si } ad - bc = 0$$

est-elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?

Exercice 5 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x + 3y, 2x - y)$