**Contrôle de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1**
**(durée : 90 minutes, justifier toutes vos réponses)**

**Exercice 1 (5 points environ)** Soit $A$ une partie majorée et non-vide de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition de la borne supérieure de $A$, qu'on notera $\sup A$.
2. Montrer que $a = \sup A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $a$ est un majorant de $A$.
   (b) $\forall \epsilon > 0\ \exists b \in A\ a - \epsilon < b \leq a$.

**Exercice 2 (5 points environ)** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \neq y) \Rightarrow (x = y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ z^2 = x^2 + y^2$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ z^2 = x^2 + y^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ x < z < y$
5. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \dfrac{1}{N^2} < \epsilon$

**Exercice 3 (5 points environ)** Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre et/ou d'équivalence ?

1. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par
$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') : \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2\ (x', y') = (x, y) + (p, q)$$
2. La relation $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par
$$A\mathcal{R}B : \text{“}A = B \text{ ou } A = B^c\text{ ”}$$

**Exercice 4 (6 points environ)** Soient $E$ un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et $A$ et $B$ deux parties de $E$. On définit :
$$f : \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \to (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ et $B$ pour que $f$ soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.