

Contrôle de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1
(durée : 110 minutes, justifier toutes vos réponses)

Exercice 1

1. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de \mathbb{R} , montrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- (a) Montrer que $(f + g)(\mathbb{R}) \subset f(\mathbb{R}) + g(\mathbb{R})$
- (b) Montrer que $\sup_{\mathbb{R}}(f + g) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$
- (c) Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.
- (d) Donner un exemple où l'inégalité précédente est une égalité.

N.B. Si $X \subset \mathbb{R}$ et $Y \subset \mathbb{R}$, on pose $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$

Exercice 2

1. Soit C l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} . On considère le prédicat sur C :

$$\mathcal{P}(f) := \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon]$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) $\exists f \in C \mathcal{P}(f)$
 - (b) $\forall f \in C \mathcal{P}(f)$
2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- (a) $\forall a \in \mathbb{R}^* \exists x \in \mathbb{R} ax^2 + x + 1 = 0$
 - (b) $\forall a \in \mathbb{R}^* \exists x \in \mathbb{C} ax^2 + x + 1 = 0$
 - (c) $\forall a \in \mathbb{R}^* \exists x \in \mathbb{R} ax^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 3 Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et/ou bijectives.

- 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$
- 2. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (2x + 2y + z, x + y + 2z, x + y - z)$

3. $h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $h(p, q) = 2^p 3^q$

Exercice 4 Soit A l'ensemble des développements décimaux propres commençant par $0,01$, i.e.

$$A = \{0,01\alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots \in \Delta \mid \forall i \geq 2 \alpha_i \in \{0,1,\dots,9\}\}$$

où Δ est l'ensemble des développements décimaux illimités propres.

1. Donner un exemple d'élément de A qui corresponde à un nombre décimal.
2. Donner un exemple d'élément de A qui corresponde à un nombre rationnel non décimal. En donner l'écriture fractionnaire.
3. Donner un exemple d'élément de A qui corresponde à un nombre irrationnel.
4. Déterminer la borne inférieure de A . Est-ce un minimum de A ?
5. Déterminer la borne supérieure de A . Est-ce un maximum de A ?