L1 MIASHS 2017/2018
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Examen de fondements des mathématiques, session de Juin 2018
(durée : 120 minutes, justifier toutes vos réponses)

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationel.
2. Donner l'énoncé de l'axiome de la borne supérieure.
3. Démontrer que toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

Exercice 2 Donner la table de vérité des expressions logiques suivantes.

1. $p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg p)$
2. $p \vee (q \Rightarrow r)$

Exercice 3 Soient A, B, C trois ensembles. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $[A \subset B \cup C] \Rightarrow [A \subset B$ ou $A \subset C]$
2. $[A \subset B$ ou $A \subset C] \Rightarrow [A \subset B \cup C]$
3. $[A \cap B = A \cup B] \Rightarrow [A = B]$

Exercice 4

1. Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions bijectives. Montrer que $g \circ f$ est bijective.
2. Donner un exemple de bijection $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
3. On considère l'application $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par
$$\psi(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$
   (a) Montrer que ψ est injective. On pourra montrer par l'absurde que le rapport entre deux nombres impairs ne peut pas être pair.
   (b) Montrer que si $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $\psi(0, p) = k$.
   (c) On rappelle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $m_p \in \mathbb{N}$ tel que $p/2^{m_p}$ soit un entier impair. Montrer que tout entier impair a un antécédent par ψ.
   (d) En déduire que ψ est surjective et donc bijective
4. Donner, en fonction de ϕ, ψ et de leurs inverses, l'expression d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$