**Interrogation de fondements des mathématiques, L1 MIASHS UP1**
**(durée : 75 minutes, justifier toutes vos réponses)**

**Exercice 1** On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \geq y_1$ et $x_2 \geq y_2$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. La relation est-elle totale ?

1. On vérifie que la relation est réflexive, transitive et anti-symétrique, .
2. La relation n'est pas totale car $(1, 2)$ et $(2, 1)$ ne sont pas en relation.

**Exercice 2** Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que $g$ est surjective.
2. On suppose que $g$ est surjective. La fonction $g \circ f$ est-elle nécessairement surjective ?

1. Montrons que $g$ est surjective. Soit $z$ dans $C$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x$ dans $A$ tel que $g \circ f(x) = z$. On pose $y = f(x)$. On a bien $y \in B$ et $g(y) = z$. Donc $g$ est surjective.
2. En considérant $A = B = C = \mathbb{R}$, $f$ la fonction constante 0 et $g(x) = x$, on montre que $g$ est surjective sans que $g \circ f$ le soit

**Exercice 3** Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x, y) = (x + y)^2$
2. $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ telle que $g(n, m) = (n - 1, m + 1)$

1. $f$ n'est pas injective car $f(0, 0) = 0 = f(-1, 1)$. Elle n'est donc pas bijective . Par contre, $f$ est surjective car pour tout $z dans \mathbb{R}_+$, on a $f(0, \sqrt{z}) = z$.

2. $g$ est surjective. En effet soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $g(p+1, q-1) = (p, q)$. $g$ est également injective. En effet soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ et $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$. On a $g(n, m) = g(n', m')$ si et seulement si $n-1 = n'-1$ et $m+1 = m'+1$. D'où on déduit $n = n'$ et $m = m'$. $g$ est donc injective.

   Comme $g$ est injective et surjective, elle est bijective.

**Exercice 4**

1. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
2. Donne un exemple de fonction injective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

1. On vérifie que la fonction suivante est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ :

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

2. On vérifie que la fonction suivant est injective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

$$g(n, p) = 2^n 3^p$$