L1 MIASHS 2020/2021
Université Paris 1

Interrogation de fondements des mathématiques (durée 1H15)
Justifier toutes vos réponses

Exercice 1 Soit E un ensemble non-vide. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\forall A \subset E\ \exists x \in E\ \ x \in A$
2. $\forall x \in E\ \exists A \subset E\ x \in A$
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) :\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$
4. $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) :\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, x-y) \end{array}$
2. $\begin{array}{l} h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ (p,q) \mapsto p^q \end{array}$

Exercice 3

1. Montrer que $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to]-1,1[\\ x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1} \end{array}$ est bijective
2. Déterminer sa réciproque.

Exercice 4

1. On considère la relation sur $\mathbb{R}$ définie par

$$A\mathcal{S}b \Leftrightarrow |a-b| \leq 3$$

   (a) Dessiner le graphe de $\mathcal{S}$

(b) La relation $\mathcal{S}$ est-elle symétrique ? transitive ? réflexive ?

2. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble X. On définit la relation $\mathcal{R}^2$ pas

$$x\mathcal{R}^2y \Leftrightarrow \exists z \in X \ x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}y$$

(a) Pour la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$, montrer que $(\leq)^2 = \leq$.

(b) Pour la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \ y = x^2 + 1$. Montrer que $x\mathcal{R}^2y \Leftrightarrow \ y = x^4 + 2x^2 + 2$.

(c) Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive alors $x\mathcal{R}^2y \Rightarrow x\mathcal{R}y$.