

Contrôle continu du 15/12/2020

**Partie 1 techniques de Calcul. Durée: 45min. Soyez clair et précis.
Le barème est à titre indicatif.**

Exercice 1 (8 points). On rappelle que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$.

(1) Donner le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \text{Arctan}(x) + \ln(1+x)$.

(2) Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f(x) = \text{Arctan}(x) + \ln(1+x)$ (utiliser la première question et la méthodes d'intégration de DL du cours)

Exercice 2 (12 points). Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} dx$.

(2) $\int_0^{\pi/4} \frac{\text{Arctan}^2(x)}{1+x^2} dx$ (utiliser le changement de variable $u(x) = \text{Arctan}(x)$).

Partie 2: Fondements des mathématiques. Durée: 45min. Justifiez toutes vos réponses. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 3 (10 points) Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives; bijectives. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2. $g = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (2x + 2y, x - y)$

Exercice 4 (10 points). On rappelle que la relation de divisibilité sur \mathbb{N} est définie par

$$n \mathcal{D} m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \ m = pn$$

On dira que n est plus petit que m au sens de la divisibilité si $n \mathcal{D} m$

1. Justifier que \mathcal{D} est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .

2. Est-ce une relation d'ordre totale ?

On note $a\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels multiples de $a \in \mathbb{N}$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Quel résultat du cours permet d'affirmer que $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$ a un plus petit élément au sens de la divisibilité.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{N}$ pour que $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$ ait un plus petit élément au sens de la divisibilité.