

# Contrôle continu du 15/12/2020

**Partie 1 techniques de Calcul. Durée: 45min. Soyez clair et précis.  
Le barème est à titre indicatif.**

**Exercice 1** (8 points). On rappelle que  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$ .

(1) Donner le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction  $f(x) = \text{Arctan}(x) + \ln(1+x)$ .

(2) Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction  $f(x) = \text{Arctan}(x) + \ln(1+x)$  (utiliser la première question et la méthodes d'intégration de DL du cours)

**Exercice 2** (12 points). Calculer les intégrales suivantes :

(1)  $\int_0^1 \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} dx$ .

(2)  $\int_0^{\pi/4} \frac{\text{Arctan}^2(x)}{1+x^2} dx$  (utiliser le changement de variable  $u(x) = \text{Arctan}(x)$ ).

**Partie 2: Fondements des mathématiques. Durée: 45min. Justifiez toutes vos réponses. Le barème est à titre indicatif.**

**Exercice 3** (10 points) Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives; bijectives. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2.  $g = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(x, y) = (2x + 2y, x - y)$

**Exercice 4** (10 points). On rappelle que la relation de divisibilité sur  $\mathbb{N}$  est définie par

$$n \mathcal{D} m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \ m = pn$$

On dira que  $n$  est plus petit que  $m$  au sens de la divisibilité si  $n \mathcal{D} m$

1. Justifier que  $\mathcal{D}$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}$ .

2. Est-ce une relation d'ordre totale ?

On note  $a\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers naturels multiples de  $a \in \mathbb{N}$ .

1. Soit  $a, b \in \mathbb{N}$ . Quel résultat du cours permet d'affirmer que  $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$  a un plus petit élément au sens de la divisibilité.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b \in \mathbb{N}$  pour que  $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$  ait un plus petit élément au sens de la divisibilité.