L1 MIASHS 2018/2019
Université Paris 1

Examen de fondements des mathématiques, session de Juin 2019
durée 110 minutes, justifier toutes vos réponses

Questions de cours

1. Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\{0,1\}), \mathcal{P}(\{0,\emptyset\})$

On a :
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \emptyset\}$
$\mathcal{P}(\{0,\emptyset\}) = \{\{0\}, \{\emptyset\}, \{0,\emptyset\}, \emptyset\}$

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier vos réponses par une démonstration)

1. $[A \subset B \cup C] \Rightarrow [A \subset B \text{ ou } A \subset C]$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
3. $[A \cap B = A \cup B] \Rightarrow A = B$
4. $[A = A \cup B] \Rightarrow A \subset B$

1. La proposition est fausse. Un contre-exemple est donné pas $A = \{0,1\}$, $B = \{0\}$, et $C = \{1\}$.
2. La proposition est vraie. Il s'agit de la loi de Morgan. Plus précisément, on a :
   — Soit $x \in (A \cup B)^c$. On a $x \notin (A \cup B)$ donc $x \notin A$ et $x \notin N$. Soit $x \in A^c$ et $x \in B^c$. Donc $x \in A^c \cap B^c$.
   — Soit $x \in A^c \cap B^c$. On a $x \in A^c$ et $x \in B^c$. Donc $x \notin A$ et $x \notin N$. Soit $x \notin (A \cup B)$ et donc $x \in (A \cup B)^c$.
3. La propostion est vraie. Supposons $A \cap B = A \cup B$.
   — Montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$, on a $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cap B$. Cceci implique $xinB$.
   — On montre de même $B \subset A$ et on en déduit que $A = B$.

4. La proposition est fausse. Un contre-exemple est donné pas $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0\}$,

Exercice 2

1. Donner un exemple de fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x^2, x^4)$ est-elle injective ? surjective ?
3. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^2$ définie par $g(x) = (x^2, x^3)$ est-elle injective ? surjective ?
4. La fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x + 2y, x - y)$ est-elle injective ? surjective ?

1. La fonction identité $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est clairement bijective.
2. — On a $f(1) = f(-1)$ et la fonction f n'est donc pas injective.
   — De plus on a $(2, 2) \in \mathbb{R}^2$ et on ne peut avoir $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x^2, x^4) = (2, 2)$ car $x^2 = 2 \Rightarrow x^4 = 4$. Donc la fonction n'est pas surjective.
3. — Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = g(y)$. On a notamment $x^3 = y^3$. Comme la fonction $x \to x^3$ est strictement monotone, on en déduit que $x = y$ et donc g est injective.
   — On a $(2, 2) \in \mathbb{R}_+^2$ et on ne peut avoir $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x^2, x^3) = (2, 2)$ car $x^2 = 2 \Rightarrow x^3 = 2\sqrt{2}$ ou $x^3 = -2\sqrt{2}$. Donc la fonction n'est pas surjective.
4. — Montrons que h est injective. Soient $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x, y) = h(u, v)$. On obtient successivement :

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y = u + 2v \\ x - y = u - v \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 3y = 3v \\ x - y = u - v \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} y = v \\ x - y = u - v \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} y = v \\ x = u \end{array} \right.$$

et on en conclut que h est injective.

— Montrons que h est surjective. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x,y), \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y) = (a,b)$. On obtient successivement :

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = a - b \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{a-b}{3} \\ x = \frac{a+2b}{3} \end{cases}$$

et on en conclut que h est surjective.

— Comme h est injective et surjective, elle est bijective.

Exercice 3 Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$, $C = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$ et $D = \{ab \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que C admet une borne supérieure
2. Montrer que $\sup C \leq \sup A + \sup B$
3. Montrer que pour tout $y \in B$, $\sup C - y$ est une majorant de A. En déduire que $\sup A \leq \sup C - y$.
4. Montrer que $\sup B \leq \sup C - \sup A$. En déduire que $\sup A + \sup B \leq \sup C$ puis que $\sup A + \sup B = \sup C$.
5. Que peut-on dire de la relation entre $\sup A \times \sup B$ et $\sup D$?

Pour les questions 1. à 4., voir exercice 2 du td 10.

— D n'est pas nécessairement majoré, par exemple si $A = B = \mathbb{R}_-$ donc D n'admet pas nécessairement de borne supérieure. En particulier, on n'a pas en général $\sup D \leq \sup A \times \sup B$.

— Si D est majoré, on a $\forall (a,b) \in A \times B$, $ab \leq \sup D$.

  — Soit $b \geq 0$ et on obtient $a \leq \dfrac{\sup D}{b}$, d'où $\sup A \leq \dfrac{\sup D}{b}$ et $b \leq \dfrac{\sup D}{\sup A}$

  — Soit $b < 0$ et on a $a \geq \dfrac{\sup D}{b}$, d'où $\sup A \geq \dfrac{\sup D}{b}$, puis $b \sup A \leq \sup D$ et $b \leq \dfrac{\sup D}{\sup A}$.

  — On en conclut $\sup B \leq \dfrac{\sup D}{\sup A}$ et donc $\sup A \sup B \leq \sup D$