Contrôle continu du 15/12/2020

Partie 2: Fondements des mathématiques. Durée: 45min. Justifiez toutes vos réponses. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 *(10 points) Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives; bijectives. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.*

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *définie par* $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2. $g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x, y) = (2x + 2y, x - y)$

Exercice 2 *(10 points). On rappelle que la relation de divisibilité sur* $\mathbb{N}$ *est définie par*

$$n\mathcal{D}m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}\ m = pn$$

On dira que n *est plus petit que* m *au sens de la divisibilité si* $n\mathcal{D}m$

1. *Justifier que* $\mathcal{D}$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}$.

2. *Est-ce une relation d'ordre totale ?*

On note $a\mathbb{N}$, *l'ensemble des entiers naturels multiples de* $a \in \mathbb{N}$.

1. *Soit* $a, b \in \mathbb{N}$. *Quel résultat du cours permet d'affirmer que* $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$ *a un plus petit élément au sens de la divisibilité.*

2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $a, b \in \mathbb{N}$ *pour que* $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$ *ait un plus petit élément au sens de la divisibilité.*

Correction

Exercice 1

1.
   - Montrons que f est injective. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$. On a nécessairement $f(n) = f(m) \geq 0$ ou $f(n) = f(m) < 0$.
     - Si $f(n) = f(m) \geq 0$, on a $n/2 = f(n) = f(m) = n/2$. Donc $n = m$.
     - Si $f(n) = f(m) < 0$, on a -$(n+1)/2 = f(n) = f(m) = -(m+1)/2$. Donc $n = m$.
     - on en conclut que f est injective.
   - Montrons que f est surjective. Soit $z \in \mathbb{Z}$.
     - Si $z \geq 0$, on pose $n = 2z$ et on a $f(n) = z$.

- Si $z < 0$, on pose $n = -(2z+1)$ et on a $f(n) = z$.
- on en conclut que f est surjective.

• Comme f est injective et surjective, elle est bijective.

2. • montrons que g est surjective. Soient $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(x, y) = g(u, v)$. On obtient successivement:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 2y = 2u + 2v \\ x - y = u - v \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y = u + v \\ x - y = u - v \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2x = 2u \\ x - y = u - v \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = v \end{array}\right.$$

et on en conclut que g est injective.

• Montrons que g est surjective. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y), \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(x, y) = (a, b)$. On obtient successivement:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 2y = a \\ x - y = b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} 4x = a - 2b \\ x - y = b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{a + 2b}{4} \\ x - y = b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{a + 2b}{4} \\ y = \dfrac{a - 2b}{4} \end{array}\right.$$

et on en conclut que g est surjective.

3. Comme g est injective et surjective, elle est bijective.

Exercice 2

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = 1 * n$, soit $n\mathcal{D}n$ et donc $\mathcal{D}$ est réflexive.

• Montrons que $\mathcal{D}$ est antisymetrique. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $n\mathcal{D}m$ et $m\mathcal{D}n$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $m = pn$ et $n = qm$. On a donc $m = pqm$. Ceci implique $pq = 1$. Or $p, q \in \mathbb{N}$, donc on doit avoir $p = q = 1$. Ceci implique $n = m$ et la relation est antisymetrique.

- Montrons que $\mathcal{D}$ est antisymetrique. Soient $n, m, s \in \mathbb{N}$, tels que $n\mathcal{D}m$ et $m\mathcal{D}s$. Il existe $p, q, r \in \mathbb{N}$, tels que $m = pn$ et $s = qm$. On a donc $s = pq * n$ et comme $pq \in \mathbb{N}$, $n\mathcal{D}s$ et la relation est transitive.
- Comme $\mathcal{D}$ est réflexive, transitive et antisymétrique, c'est une relation d'ordre.

2. $\mathcal{D}$ n'est pas une relation d'ordre total car on a ni $2\mathcal{D}3$ ni $3\mathcal{D}2$
3. On a $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists p, q \in \mathbb{N}\ x = pa \wedge x = qb\}$, i.e. $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de a et b. Le résultat du cours permettant d'affirmer l'existence d'un plus petit élément au sens de la divisibilité et le théorème énonçant l'existence du ppcm.
4. Montrons que $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$ a un plus petit élément au sens de la divisibilité si et seulement si a est un multiple de b (ou réciproquement).
5. Si a est un multiple de b, on clairement $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N} = b\mathbb{N}$ et tout élément de $b\mathbb{N}$ étant un multiple de b, b est le pus petit élément de $b\mathbb{N}$ au sens de la divisibilité.
6. Si $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$ a un plus petit élément au sens de la divisibilité $c \in \mathbb{N}$, on a $c\mathcal{D}a$ et $c\mathcal{D}b$. Ceci implique $c \leq a$ et $c \leq b$. Or, le plus petit élément (au sens de l'ordre naturel) de $a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N}$ est soit a soit b. On a donc $c = a$ ou $c = b$. D'après ce qui précède, on en conclut que $a\mathcal{D}b$ et $b\mathcal{D}a$, ce qui achève la démonstration.