

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

DM

En sciences sociales, les préférences des agents sont souvent représentées par des relations binaires, appelé relations de préférences. Généralement ces relations sont des pré-ordres (réflexive et transitive) voire des relations d'ordre (réflexive, transitive et anti-symétrique). Par exemple, on peut ainsi représenter les préférences d'électeurs lors d'une élection. Ainsi si on considère un ensemble de candidats à l'élection présidentielle de 1969

$$A = \{Defferre, Poher, Pompidou\},$$

et représenter les préférences de deux électeurs, Léa et Paulo, comme suit:

$$\text{Léa : } Pompidou \succ Defferre \succ Duclos$$

$$\text{Paulo : } Duclos \succ Defferre \succ Pompidou$$

Plus généralement, on peut noter par $\mathcal{O}(A)$, l'ensemble des relations d'ordre sur A . La théorie du choix social s'intéresse à l'agrégation des préférences, par exemple lors d'un vote. Formellement, elle cherche à déterminer une fonction d'agrégation:

$$f : (\mathcal{O}(A))^n \rightarrow A$$

qui associe à l'ensemble des préférences de n électeurs, le choix d'un candidat.

1. On considère d'abord la procédure d'agrégation suivante: on classe premier (socialement) le candidat apparaissant le plus de fois à la première place de l'ordre de chaque individu. Donner un exemple avec 4 électeurs où une majorité de votants préfère une autre alternative que le candidat choisi selon cette procédure.
2. On considère ensuite la procédure de Condorcet où l'on compare tous les candidats deux à deux et on énonce qu'un candidat a est préféré (socialement) à b si une majorité de votants préfère a à b . Construire un exemple avec cinq électeurs où la relation de préférence sociale "la majorité préfère a à b " qui résulte de cette procédure n'est pas transitive. En quoi cela peut-il être vu comme un paradoxe ?
3. Donner un énoncé mathématique du théorème d'impossibilité d'Arrow.