Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

DM 4

On cherche à montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, c'est à dire qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On va en fait démontrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable en utilisant l'argument diagonal de Cantor.

Pour ce faire, supposons que $[0, 1[$ est dénombrable.

1. Justifier qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que $[0, 1[= \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. Pour chaque r_n on note son développement décimal sous la forme:
$$r_n = 0, r_{n,1}r_{n,2}r_{n,4}r_{n,4} \cdots$$
3. Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \{1, 2\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n \neq r_{n,n}$.
4. Soit
$$x = 0, x_1x_2x_3 \cdots$$
A t'on $x \in [0, 1[$?
5. En déduire que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.