Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

DM 5[1]

Le but du problème est de montrer que e n'est pas un nombre rationnel en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

1. Pour tout entier $n > 0$, on pose
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$
Calculer $I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$:
$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$
(b) Exprimer en fonction de n , $J_n = \int_0^1 x^n dx$.
(c) En déduire que pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. Montrer que, pour tout $n > 0$, on a
$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

4. Pour tout entier $n > 0$ on pose $k_n = n!e - I_n$.
(a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n.
(b) Calculer k_1.
(c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n que k_n est un nombre entier pour tout n strictement positif.
(d) Montrer que pour tout $n > 1$,
$$n!e = k_n + I_n$$
n'est pas un nombre entier.

5. Soient p et q deux entiers strictement positifs.
(a) Montrer que pour $n \geq q$, $\frac{n!p}{q}$ est un nombre entier.
(b) En déduire que e n'est pas un nombre rationnel par l'absurde).

[1] d'après http://labomath.free.fr/