L1 MIASHS 2018/2019
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Examen de fondements des mathématiques, session de Janvier 2019
(durée : 120 minutes, justifier toutes vos réponses)

Exercice 1 Donner la négation des propositions suivantes.

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
2. $p \vee (q \Rightarrow r)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\ x + y \geq z$

Exercice 2 Soient A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
3. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

Exercice 3 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants admettent-ils une borne supérieure ? un plus grand élément ? Si oui, les déterminer.

1. $A = [0, 1[$
2. $B = [0, 2[\cup \{3\}$
3. $C = [0, +\infty[$
4. $D = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $E = \{\frac{x^2}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 4 Soit A une partie non vide, majorée et minorée de $\mathbb{R}$. On pose

$$B = \{|x - y| \mid (x, y) \in A \times A\}$$

1. Justifier l'existence de $\sup A$ et $\inf A$.
2. Montrer que B est bornée. En déduire que $\sup B$ existe.
3. Montrer que $\sup B \leq \sup A - \inf A$
4. Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$