Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.
L1 MIASHS -Fondement des mathématiques

DM 1

On appelle forme propositionnelle, une application qui associe à un nombre fini de propositions (les variables) une nouvelle proposition. Nous avons déjà rencontré de telles formes propositionnelles par exemple $p \wedge q$ est une forme propositionnelle à deux variables, $(\neg p) \vee q \vee r$ est une forme propositionnelle à trois variables. En pratique on peut identifier les formes propositionnelles à n variables avec les tables de vérités dépendant de n propositions.

1. Combien y-a-t-il de formes propositionnelles dépendant d'une seule variable ? de deux variables ?
   Une forme propositionelle $f(p)$ à une variable correspond au choix d'une valeur de vérité (1 ou 0) pour chaque valeur possible de p. Il y a deux valeurs possibles pour p (1 ou 0) et donc $2 * 2 = 4$ formes propositionnelles.
   Une forme propositionelle $f(p)$ à deux variables correspond au choix d'une valeur de vérité (1 ou 0) pour chaque valeur possible du couple (p, q). Il y a quatre valeurs possibles pour (p, q) ($(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ou $(1,0)$) et donc $2^4 = 16$ formes propositionnelles distinctes.

2. Démontrer par récurrence sur le nombre de variables (propositions) que toute forme propositionnelle peut s'exprimer en fonction des trois connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ *Initialisation: Les forme propositionnelles à 1 variable sont les suivantes:*

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	p
0	0
1	1

p	$V(p)$
0	1
1	1

p	$F(p)$
0	0
1	0

On remarque que $V(p) = p \vee \neg p$ et $F(p) = p \wedge \neg p$ ce qui démontre que toute forme propositionnelle à 1 variable s'écrit en fonction des trois connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$ et $\neg$.

Hérédité: On suppose que toute forme propositionnelle à n variables $g(p_1, \cdots, p_n)$ s'écrit en fonction des trois connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$

et $\neg$. *Soit alors* $f(p_1, \cdots, , p_{n+1})$ *une forme propositionnelle à* $(n+1)$ *variables. On a*

$$f(p_1, \cdots, , p_{n+1}) = (p_{n+1} \vee f(p_1, \cdots, , p_n, 1)) \wedge (\neg p_{n+1} \vee f(p_1, \cdots, , p_n, 0))$$

Puisque $f(p_1, \cdots, , p_n, 1)$ *et* $f(p_1, \cdots, , p_n, 0)$ *sont des formes propositionnelles à* n *variables (la dernière valeur est fixée), on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure.*

3. Démontrer que toute forme propositionnelle peut s'exprimer en fonction des deux connecteurs logiques $\neg$ et $\wedge$. *D'après ce qui précède, il suffit d'exprimer* $\vee$ *en fonction de* $\neg$ *et* $\wedge$. *Or, on a:*

$$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

4. Démontrer que toute forme propositionnelle peut s'exprimer uniquement en fonction du connecteur logique *nor* (non p et non q) dont la table de vérité est donnée par:

p	q	p *nor* q
1	1	0
1	0	0
0	0	1
0	1	0

D'après ce qui précède, il suffit d'exprimer $\neg$ *et* $\wedge$ *en fonction de nor Or, on vérifie facilement (e.g. en utilisant une table de vérité) que:*

$$\neg p = (p \ \ nor \ p)$$

$$p \wedge q = \neg p \ nor \ \neg q = (p \ nor \ p) \ nor \ (q \ nor \ q)$$