Complément à l'exercice 3 du TD2

October 4, 2022

Dans cet exercice, on considère un prédicat p sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: autrement dit, pour chaque triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,$p(x, y, z)$ est une proposition. Par exemple:

- $p_1(x, y, z) : x + z = y + 1$: dans ce cas la proposition $p_1(\pi, 2, \frac{1}{3}) : \pi + \frac{1}{3} = 2 + 1$ est fausse, la proposition $p_1(2, 1, 0) : 2 + 0 = 1 + 1$ est vraie, etc.
- $p_2(x, y, z) : (xz + y^2 = 0) \Rightarrow (x = y = 0)$. Dans ce cas $p_2(0, 0, 3)$ est vraie, $p_2(-1, 1, 0)$ aussi, mais $p_2(1, 1, -1)$ est fausse.
- $p_3(x, y, z) : z(x + y) \geq 0$. Dans ce cas $p_3(-1, \sqrt{2}, \pi)$ est vraie mais $p_3(-1, 0, 1)$ est fausse.
- $p_4(x, y, z)$: la fonction $f(t) = yE(t + x)$ est continue au point z[1]. dans ce cas, la proposition $p_4(0, 1, \frac{1}{2})$ est "la fonction $f(t) = E(t)$ est continue au point $\frac{1}{2}$" donc elle est vraie, et $p_4(-\frac{1}{4}, 2, \frac{5}{4})$ est "La fonction $f(t) = 2E(t - \frac{1}{4})$ est continue au point $\frac{5}{4}$" est fausse (car E a une discontinuité en 1)

Bref, ce ne sont pas les possibilités qui manquent pour peu qu'on soit un peu créatifs. A partir d'un tel prédicat, on peut aussi construire des propositions en ajoutant des quantificateurs sur chacune des variables.

Ici, on va regarder ce qui se passe si on fait ça avec les quantificateurs "pour tout" pour les deux premières variables x et y , et "il existe" pour la dernière variable z, et qu'est ce que ça change si on change l'ordre des quantificateurs.

On considère donc les 4 propositions suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ p(x, y, z)$
2. $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ p(x, y, z)$
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ p(x, y, z)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ p(x, y, z)$

Et la question est, y a-t-il des implications ou des équivalences entre ces propositions qui sont vraies, *quel que soit le prédicat p* ?

On trouve qu'il y en a: on a en fait

$$(2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1), \quad \text{et } (1) \Leftrightarrow (3) \text{ donc } (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$$

(et donc, par transitivité de l'implication, (2) $\Rightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow$ (3).)

Une explication de ces différentes relations logiques est donnée ici: `https://youtu.be/3xAZB_Scet0`.

Dans ce complément, on va donner des exemples de prédicats pour montrer que ces 4 propositions ne sont pas toutes équivalentes entre elles. Ainsi, on peut trouver un prédicat p tel que (4) soit vraie, mais (2) fausse, ce qui montre que (4) et (2) ne sont pas équivalentes entre elles: l'ordre des quantificateurs compte !

[1] On note E la fonction partie entière

Prédicat tel que (1) et (3) sont vraies, mais (2) et (4) sont fausses.

Considérons le prédicat $p_1(x, y, z)$: $x + z = y + 1$ dont on a parlé en introduction.
Alors la proposition

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ p_1(x, y, z)$$

est vraie.

Preuve: Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On cherche $z \in \mathbb{R}$ tel que $x + z = y + 1$.
$\rightsquigarrow$ On peut poser $z = -x + y + 1$, et on a alors bien

$$x + z = x + (-x + y + 1) = y + 1$$

ce qui démontre (1).
Remarque: Du coup, la proposition (3) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ p_1(x, y, z)$ est vraie aussi.

En revanche, la proposition

$$(4)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ p_1(x, y, z)$$

est fausse. Montrons-le, en montrant que sa négation est vraie:

$$\neg(4) :\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \neg p_1(x, y, z)$$

Pour montrer $\neg(4)$, on cherche donc un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $z \in \mathbb{R}$, on peut trouver un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + z \neq y + 1$.
Essayons (par exemple) $x = 0$. Soit $z \in \mathbb{R}$ quelconque: on cherche $y \in \mathbb{R}$ tel que $0 + z \neq y + 1$.
$\rightsquigarrow$ Ca marche si on prend[2] $y = z$. On a donc bien trouvé, pour chaque $z \in \mathbb{R}$, un réel y tel que $0 + z \neq y + 1$: donc $\neg(4)$ est vraie, et donc (4) est fausse.

Pour ce prédicat p_1, il est donc faux que $(1) \Rightarrow (4)$, puisqu'on a montré $(1) \wedge \neg(4) \iff \neg((1) \Rightarrow (4))$.
Autrement dit, l'implication $(4) \Rightarrow (1)$ est vraie pour n'importe quel prédicat, mais pas sa réciproque.

Remarque: Pour ce prédicat p_1, la proposition

$$(2)\ \exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ p_1(x, y, z)$$

est également fausse. Montrons-le en montrant que sa négation

$$\neg(2)\ \forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \neg p_1(x, y, z)$$

est vraie.
Soit $z \in \mathbb{R}$,on cherche donc deux réels x, y tels que $x + z \neq y + 1$.
$\rightsquigarrow$ Prenons par exemple $x = 0$ et $y = z$:on a alors $x + z = z \neq z + 1 = y + 1$, comme on voulait. Donc $\neg(2)$ est vraie, donc (2) est fausse.

Prédicat tel que (1), (3) et (4) sont vraies, mais (2) est fausse.

Considérons maintenant le prédicat $p_2(x, y, z) : xz + y^2 = 0$. Alors la proposition

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ p_2(x, y, z)$$

est vraie.

[2] par exemple, ce n'est pas la seule possibilité !

En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On cherche $z \in \mathbb{R}$ tel que, si $xz + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$.

$\rightsquigarrow$ Essayons avec $z = x$. Alors, si on suppose que $xz + y^2 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 0$, on en déduit que

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

comme on le voulait.

Donc (1) est vraie (et, de la même façon, (3) est vraie aussi) pour ce prédicat.

Et, pour le prédicat p_2,la proposition

$$(4)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ p_2(x, y, z)$$

est également vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,cherchons un réel z tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, si on suppose que $xz+y^2 = 0$, alors on peut en déduire que $x = y = 0$.

$\rightsquigarrow$ Comme précédemment, on peut prendre $z = x$. Si on suppose que $xz+y^2 = 0$, c'est-à-dire que $x^2+y^2 = 0$,on en déduit comme ci-dessus que $x = y = 0$. Donc (4) est vraie pour ce prédicat.

En revanche, la proposition

$$(2)\ \exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ p_2(x, y, z)$$

est fausse. Montrons-le en montrant que sa négation est vraie: on a toujours

$$\neg(2)\ \forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ \neg p_2(x, y, z)$$

autrement dit[3]

$$\neg(2)\ \forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ xz + y^2 = 0 \wedge (x \neq 0 \vee y \neq 0)$$

Soit donc $z \in \mathbb{R}$,on cherche deux réels x, y qui ne sont pas tous les deux nuls (i.e. qui vérifient $(x \neq 0 \vee y \neq 0)$) , mais tels que $xz + y^2 = 0$.

On sépare deux cas: si $z = 0$,on peut prendre $x = 37\pi$ et $y = 0$: on a alors $xz + y^2 = 0$ mais $x \neq 0$,donc $x \neq 0 \vee y \neq 0$.

Si $z \neq 0$,on peut prendre $x = -z$ et $y = z$: alors x et y sont non nuls, et $xz + y^2 = -z^2 + z^2 = 0$.

$\rightsquigarrow$Dans tous les cas, on a bien trouvé un x et un y qui marchent, donc $\neg(2)$ est vraie. Et donc (2) est fausse.

Pour ce prédicat p_2, il est donc faux que $(4) \Rightarrow (2)$, puisqu'on a montré $(4) \wedge \neg(2) \iff \neg((4) \Rightarrow (2))$.

Autrement dit, l'implication $(2) \Rightarrow (4)$ est vraie pour n'importe quel prédicat, mais pas sa réciproque.

Prédicat tel que (1),(2), (3) et (4) sont toutes vraies.

Considérons enfin le prédicat $p_3(x, y, z) : z(x + y) \geq 0$.

Alors la proposition

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ \ p_3(x, y, z)$$

est vraie.

En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On cherche $z \in \mathbb{R}$ tel que $z(x + y) \geq 0$.

$\rightsquigarrow$ Essayons avec $z = x + y$. Alors, on a $z(x + y) = (x + y)^2 \geq 0$, comme on le voulait.

Donc (1) est vraie (et, de la même façon, (3) est vraie aussi) pour ce prédicat.

Et, pour le prédicat p_3,la proposition

$$(4)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ p_3(x, y, z)$$

[3] en utilisant la négation de l'implication: $\neg(p \Rightarrow q) \iff p \wedge \neg q$

est également vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,cherchons un réel z tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $z(x+y) \geq 0$.

$\rightsquigarrow$ Cette fois, on peut prendre $z=0$. On a alors $z(x+y)=0 \geq 0$.

Donc (4) est vraie.

Enfin, la proposition

$$(2)\ \exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ p_2(x,y,z)$$

est vraie: Pour le montrer, cherchons $z \in \mathbb{R}$,tel que, quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$,$z(x+y) \geq 0$.

Comme précédemment, si on prend $z=0$,alors $z(x+y)=0 \geq 0$, comme demandé.

Bonus 1: Montrer que, pour le prédicat $\tilde{p_3}(x,y,z)$: $z(x+y) > 0$, les propositions $(1),(2),(3),(4)$ sont toutes fausses.

Bonus 2: Parmi les propositions $(1),(2),(3),(4)$, lesquelles sont vérifiées avec le prédicat $p_4(x,y,z)$: “la fonction $f(t)=yE(t+x)$ est continue au point z”.