TD4 : Th. des ensembles (suite)

Ex 9 : E ens. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E) \to$ ens. des parties (s-ens.) de E donc les élts de $\mathcal{Q}$ sont des parties de E c à d. si $A \in \mathcal{Q}$ alors $A \subset E$

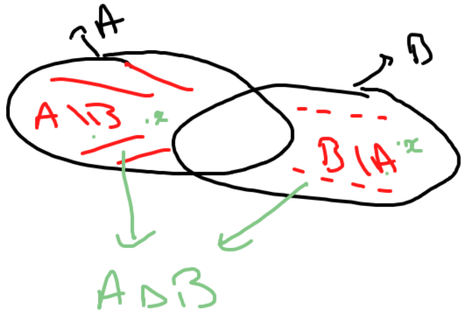
1) $\forall (A,B) \in \mathcal{Q}^2$, $(A \Delta B \in \mathcal{Q}\ ,\ A \cap B \in \mathcal{Q})$

2) $\forall (A,B) \in \mathcal{Q}^2$; $(A \Delta B \in \mathcal{Q}\ ,\ A \cup B \in \mathcal{Q})$

3) $\forall (A,B) \in \mathcal{Q}^2$, $(A \setminus B \in \mathcal{Q}\ ,\ A \cup B \in \mathcal{Q})$

$\mathcal{Q} = \{\ ???\ \}$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Pour démontrer que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) on va vérifier que

(1) $\Rightarrow$ (3) ; (3) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (3) : hyp : (1)

concl : (3)

Soient A et $B \in \mathcal{Q}$ t.q. $A \Delta B \in \mathcal{Q}$ et $A \cap B \in \mathcal{Q}$ (d'après l'hyp. (1))

$A \setminus B \in \mathcal{Q}$:

on remarque que

$$A \setminus B = (A \Delta B) \cap A \in \mathcal{Q} \quad (\text{car } A \Delta B \in \mathcal{Q} \text{ et } A \in \mathcal{Q})$$

- $(A \Delta B) \cap A = [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap A$

$$= [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap A$$

distributivité.

$$= [(A \cap B^c) \cap A] \cup [(B \cap A^c) \cap A]$$

assoc.

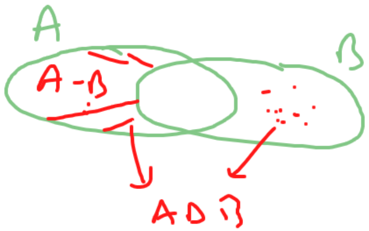
$$= (A \cap B^c) \cup [B \cap (A^c \cap A)]$$

$$= (A \cap B^c) \cup [B \cap \emptyset] = (A \cap B^c) \cup \emptyset$$

$$= A \cap B^c = A \setminus B$$

$$\mathcal{Q} = \{ \underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{B}, \underset{(3)}{A \Delta B}, \underset{(4)}{A \cap B}, (i) \Delta (j) \}$$

$$(i) \cap (j)$$



$$A \setminus B = \underset{\in \mathcal{Q}}{A} \; \Delta \underset{\in \mathcal{Q}}{(A \Delta B)}$$

$$\text{--- } \cap \text{ ---}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \Delta (A \Delta B) = \cancel{(A \setminus (A \Delta B)) \cup ((A \Delta B) \setminus A)} \\ = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{array} \right.$$

$$A \setminus B = A \Delta (A \cap B) \, ??$$

$A \cup B \in \mathcal{Q}$??

on remarque : $A\cup B = (A\setminus B)\,\Delta\, B \in \mathcal{Q}$

car $A\setminus B \in \mathcal{Q}$ (d.v.) et $B\in\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = \{\underbrace{A}_{1},\ \underbrace{B}_{2},\ \underbrace{A\Delta B}_{3},\ \underbrace{A\cap B}_{4},\ (i)\,\Delta\,(j);\ (i)\cap(j),\ (i)\setminus(j)\}$$

$B\setminus A\in\mathcal{Q}$ $\quad$ $\underbrace{A\setminus B}_{5}\in\mathcal{Q}$

$$\cdot\ (A\setminus B)\,\Delta\, B = [(A\setminus B)\cup B]\setminus[(A\setminus B)\cap B]$$
$$= [(A\cap B^c)\cup B]\setminus[(A\cap B^c)\cap B]$$
$$= [(A\cup B)\cap \underbrace{(B^c\cup B)}_{E}]\setminus[A\cap \underbrace{(B^c\cap B)}_{\phi}]$$
$$= [(A\cup B)\cap E]\setminus[A\cap\phi]$$
$$= (A\cup B)\setminus \phi$$
$$= A\cup B.$$

$$A\cup B = \underbrace{(A\setminus B)}_{\in\mathcal{Q}} \cup \underbrace{B}_{\in\mathcal{Q}}$$

$$A\cup B = \underset{\in\mathcal{Q}}{(i)}\ \Delta\ \underset{\in\mathcal{Q}}{(j)} \in\mathcal{Q}$$
$$(i)\cap(j)\in\mathcal{Q}$$
$$(i)\setminus(j)\in\mathcal{Q}$$

$$A\cup B = A\,\Delta\,(A\cap B)$$
$$(A\setminus A\cap B)\cup(A\cap B\setminus A)$$
$$=(A\setminus B)\cup\phi$$
$$=A\setminus B$$

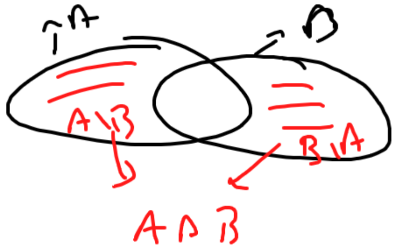
$\mathcal{A} = \{ \underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{B}, \underset{(3)}{A \setminus B}, \underset{(4)}{A \cup B}, \overset{\in \mathcal{A}}{(i)} \setminus \overset{\in \mathcal{A}}{(j)} ; (i) \cup (j) \}$

$B \setminus A$

$(3) \Rightarrow (2)$: hyp : (3)

concl : (2)

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ t.q. $A \setminus B \in \mathcal{A}$ et $\overline{A \cup B \in \mathcal{A}}$
(d'après l'hyp. (3))



- $A \cup B \in \mathcal{A}$ d'après l'hyp. (3)
- $A \Delta B \in \mathcal{A}$??

on sait que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

or $A \setminus B$ et $B \setminus A \in \mathcal{A}$ (par hyp (3)) donc $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ (d'après l'hyp (3))

ceci donne $A \Delta B \in \mathcal{A}$

$(2) \Rightarrow (1)$: hyp (2)

cond : (1)

$$Q = \{ \underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{B}, \underset{(3)}{A \Delta B}, \underset{(4)}{A \cup B}, (i) \Delta (j), (i) \cup (j) \}$$

Soient $A, B \in Q$ t.q. $A \Delta B \in Q$ et $A \cup B \in Q$

. $A \Delta B \in Q$ (d'après l'hyp (2))

. $A \cap B \in Q$??

on remarque que $A \cap B = (A \cup B) \Delta (A \Delta B) \in Q$

car $A \cup B \in Q$ et $A \Delta B \in Q$ (d'après l'hyp. (2))

$A \Delta B$

$$A \cap B = (i) \Delta (j)$$

$$(i) \cup (j)$$

$$A \cap B = A \Delta (A \Delta B)$$
$$= (A \setminus A \Delta B) \cup ((A \Delta B) \setminus A)$$
$$= (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

. $(A \cup B) \Delta (A \Delta B) = [(A \cup B) \setminus (A \Delta B)] \cup [(A \Delta B) \setminus (A \cup B)]$

$$= (A \cap B) \cup \emptyset$$

$$= A \cap B$$

D'où $(1) \Longleftarrow (2) \Longleftarrow (3)$

Ex 10 : $A = \{a, b\}$ $C = \{3, 4\}$

$B = \{2, 3\}$

1) $A \times (B \cup C)$

- $B \cup C = \{2, 3, 4\}$
- $A \times (B \cup C) = \{(a;2), (a;3), (a;4), (b;2), (b;3), (b;4)\}$

2) $(A \times B) \cup (A \times C)$:

- $A \times B = \{(a;2), (a;3), (b;2), (b;3)\}$
- $A \times C = \{(a;3), (a;4), (b;3), (b;4)\}$
- $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a;2), (a;3), (a;4), (b,2), (b,3), (b;4)\}$

$$\boxed{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}$$

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{e, f\}$

$A \times B = \{(\underset{\in A}{a} ; \underset{\in B}{b}) / a \in A \text{ et } b \in B\}$

$(a, b) \neq (b, a)$ $A \times B \neq B \times A$.

- $A \times A = A^2$

$A \times B = \{(a;e), (a;f), (b;e), (b;f), (c;e), (c;f)\}$

- soit $(\underset{\in A}{x} ; \underset{\in B}{y}) \in A \times B$

- Soit $z \in A \times B$ alors $z = (x;y)$ tq. $x \in A$ et $y \in B$

3) $\underline{A \times (B \cap C)}$ $\quad A = \{a, b\} \quad B = \{2, 3\} \quad C = \{3, 4\}$

- $B \cap C = \{3\}$
- $A \times (B \cap C) = \{(a;3), (b;3)\}$

4) $\underline{(A \times B) \cap (A \times C)}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a;3), (b;3)\}$

$$\boxed{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$$