TD4 : Th. des ensembles (suite)

Ex 8 : E ens. t.q. $\text{card}\, E = n$

$\text{card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n$??

$E_i \longrightarrow \text{card}(E_i) = i$

par ex : . E_3 càd E_3 contient 3 élts, $\text{card}(E_3) = 3$

. E_n càd $\text{card}(E_n) = n$.

Rq : $E_2 = \{x_1, x_2\}$ $\quad \text{card}(E_2) = 2$

(n) $\mathcal{P}(E_2) = \{\phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\} \longrightarrow \text{card}\, \mathcal{P}(E_2) = 4 = 2^2$

(n+1) . $E_3 = \{x_1, x_2, a\}$ $\quad \text{card}(E_3) = 3$

$\mathcal{P}(E_3) = \{\phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{a\}, \{x_1, a\}, \{x_2, a\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, a\}\} \longrightarrow \text{card}\, \mathcal{P}(E_3) = 8 = 2^3$

$\phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}$

$\{a\}, \{x_1, a\}, \{x_2, a\}, \{x_1, x_2, a\}$

$= \{F \in \mathcal{P}(E_3) ; a \in F\} = \{F \subset E_3 ; a \in F\}$

$\phi \cup \{a\} ; \{x_1\} \cup \{a\} ; \{x_2\} \cup \{a\} ; \{x_1, x_2\} \cup \{a\}$

$= \{F \in \mathcal{P}(E_3) \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \in \mathcal{P}(E_2)\} = \text{card}(\mathcal{P}(E_2))$

$F' \subset E_3 \setminus \{a\} = E_2$

$* \; E_3 = E_2 \cup \{a\}$

$\{F \in \mathcal{P}(E_3), a \notin F\} = \{F \subset E_3 ; a \notin F\}$

$= \mathcal{P}(E_2)$

$$\boxed{\mathcal{P}(E_3) = \mathcal{P}(E_2) \cup \{F \in \mathcal{P}(E_3) \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_2\}}$$

card $P(E_n) = 2^n$!!

Initialisation : pour $\boxed{n=0}$ c.à.d. card$(E_0) = \boxed{0}$ alors $E_0 = \emptyset$

et on a : $P(E_0) = \{\underset{=}{\emptyset}\}$ donc $\underbrace{\text{card } P(E_0)}$ $= 1 = \underbrace{2^0}$

hyp. de récurrence : si card$(E_n) = n$ alors $\boxed{\text{card } P(E_n) = 2^n}$; $E_n = \{x_1, \dots, x_n\}$

cond. de récurrence : si card$(E_{n+1}) = n+1$ alors card $\underline{P(E_{n+1})} = 2^{n+1}$

- $E_{n+1} = \{x_1, \dots, x_n, a\}$ t.q. $a \notin E_n$

$E_{n+1} = \underline{E_n} \cup \{a\}$

- Les parties de E_{n+1} sont :
  - les parties de E_{n+1} qui ne contient pas a c.à.d. sont les parties de E_n
  - les parties de E_{n+1} qui contient a c.à.d. sont la réunion de $\{a\}$ avec les parties de E_n

c.à.d. sous forme ensembliste :

$$P(E_{n+1}) = \{F \subset E_{n+1} / a \notin F\} \cup \{F \subset E_{n+1} / a \in F\}$$

$$= \{F \subset E_{n+1} / F \subset \underbrace{E_{n+1} \setminus \{a\}}_{E_n}\} \cup \{F \subset E_{n+1} / F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_{n+1} \setminus \{a\}\}$$

$\underline{F' \subset E_n}$

$$= \underline{P(E_n)} \cup \underline{\{F \subset E_{n+1} / F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_n\}}$$ t.q. $\ell \cap \mathcal{N} = \emptyset$

• on sait que card $P(E_n) = 2^n$ d'après l'hyp. de récurrence

<u>1ère méthode</u> :

$$\text{card}\{F \subset E_{n+1} \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_n\} = \text{card}\{F' \,;\, F' \subset E_n\}$$
$$= \text{card}\, P(E_n)$$
$$= 2^n$$

Ainsi
$$\begin{cases} \text{card}\, P(E_{n+1}) = \text{card}\, P(E_n) + \text{card}\{F \subset E_{n+1} \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_n\} \\ = 2^n + 2^n \\ = 2 \times 2^n = 2^{n+1} \end{cases}$$

$x + x = 2x$

<u>2ème méthode</u> : Comme l'appl.
$$\begin{array}{ccc} P(E_n) & \longrightarrow & \{F \subset E_{n+1} \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_n\} \\ F' & \longmapsto & F' \cup \{a\} \end{array}$$
est une bijection donc card $P(E_n) = \text{card}\{F \subset E_{n+1} \,/\, F = \{a\} \cup F' \text{ où } F' \subset E_n\} = 2^n$

Ainsi card $P(E_{n+1}) = 2^n + 2^n$
$= 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

• $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cap B$

• si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$