Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique niveau 2 : **Master de démographie**

par Alexandre Avdeev, (IDUP) ; avec la contribution et participation de
Jitka Rychtaříková (DDG, Université Charles à Prague) et
Irina Troitskaia (Université d'État Lomonosov à Moscou, Faculté d'économie)

Chapitre 11

Modèles de croissance et de la structure de population par âge

- Modèles de croissance
  - un aperçue historique de la notion de population
  - une idée générale : population est une fonction mathématique ;
  - la croissance exponentielle comme une loi générale de croissances démographique ;
  - limites de croissance et une idée de la croissance logistique
- Modèles de structures
  - la table de mortalité comme un modèle d'une population stationnaire (idéal des utopistes)
  - population stable comme un modèle général d'évolution de la structure par âge

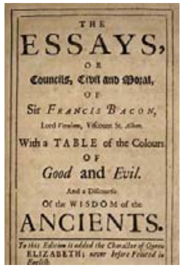
Lecture :

- Jean Bourgeois-Pichat – *La dynamique des populations: populations stables, semi-stables et quasi-stables*. Cahier de l'INED "Travaux et documents" n°133, Paris, PUF, 1994, 311 p.
- Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p138-190
- Henry Leridon et Laurent Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.32-74
- Léon Tabah "Relationships between age structure, fertility, mortality and migration. Population replacement and renewal". United Nations World Population Conference. Beograd, 1965. Background paper B.7/15/E/476
- Brian Charlesworth - *Evolution in age-structured population*. Cambridge. 1980, Cambridge University Press, 300 p.
- Alfred Lotka - *Théorie analytique des associations biologiques*. I. Principes (1934) ; II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine (1939), Hermann, Paris
- On-line manual: ***Population Analysis for Policies & Programmes***. IUSSP https://papp.iussp.org/index.html

I. Modèles de croissance

Aperçu historique (rappel) :

population comme un nombre ou une fonction



L'apparition du mot et de la notion « population »

1625 – invention du mot « population » par Sir **Francis Bacon (22.01.1561–09.04.1626).**
dans ***"Essayes or Counsels, Civill and Morall"*** (avec 58 essais) publié en **1625**
(c'est la troisième édition, la première ***"Essayes: Religious Meditations. Places of Perswasion and Disswasion. Seene and Allowed "*** a été publiée en 1597 avec 10 essais, la 2[e] en 1612 avec 38 essais),

Essai XV : « Of Seditions and Troubles » [« Sur excitation à la rébellion et troubles »] :

"Generally, it is to be foreseen that ***the population*** *of a kingdom (especially if it be not mown down by wars) do not exceed the stock of the kingdom which should maintain them*. Neither is the population to be reckoned only by number; for a smaller number that spend more and earn less do wear out an estate sooner than a greater number that live lower and gather more. Therefore the multiplying of nobility and other degrees of quality in an over proportion to the common people doth speedily bring a state to necessity; and so doth likewise an overgrown clergy; for they bring nothing to the stock; and in like manner, when more are bred scholars than preferments can take off."

Texte complet est accessible sur : http://www.authorama.com/essays-of-francis-bacon-16.html

« Généralement on doit veiller que ***la population*** d'un Royaume, *(spécialement si elle n'est pas fauchée par les guerres) n'excède pas les ressources du royaume nécessaires à leur entretien.* Aucune population ne doit être évaluée uniquement par son nombre, puisque celle moins nombreuse qui dépense plus et gagne moins épuise l'Etat plus rapidement que celle nombreuse qui vive plus modestement et thésaurise davantage. Par conséquent, la multiplication de la noblesse et d'autres états de qualité dans une proportion élevée par rapports aux gens communs doit amener un Etat dans le besoin; de même pour le surcroit du clergé qui n'apporte rien, et aussi quand le nombre des gens lettrés dépasse le nombre de places que le service peut leur offrir ».

Cependant, dans les premières éditions françaises ce mot a été traduit en *peuple* ou *monde.*

Les contemporains de F.Bacon: *Galileo Galilei* (1564-1642), Italie, *René Descartes* (1596-1650), France, Tommaso Campanella (1568-1639) Italie-France

Denis Diderot,
né le 5 octobre 1713
à Langres et mort le
31 juillet 1784

L'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers est une encyclopédie française,

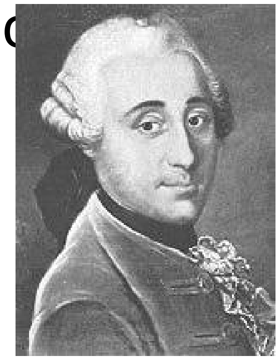
éditée de 1751 à 1772 sous la direction de Denis Diderot et, partiellement, de Jean Le Rond d'Alembert

Jean Le Rond
d'Alembert
né le 16 novembre
1717 à Paris où il est
mort le 29 octobre
1783.

Tom 13, 1765-12, Pomacies – Reggio

POPULATION, s. f. (Phys. Polit. Morale.) ce mot est abstrait, pris dans l'acception la plus étendue, il exprime le produit de tous les êtres multipliés par la génération ; car la terre est peuplée non-seulement d'hommes, mais aussi des animaux de toutes espèces qui l'habitent avec eux. La reproduction de son semblable est dans chaque individu le fruit de la puissance d'engendrer ; la population en est le résultat. Mais cette expression s'applique plus particulièrement à l'espèce humaine ; & dans ce sens particulier, elle désigne le rapport des hommes au terrain qu'ils occupent, en raison directe de leur nombre & inverse de l'espac

Étienne Noël Damilaville,
né à Bordeaux le 21 novembre 1723
et mort le 13 décembre 1768,



La stabilité est une règle, la croissance est une anomalie

Dans l'Antiquité: un nombre est une quantité fixe

Platon (428-348 av.J.-C.) dans *La République* et *Les Lois* imagine une population stationnaire (5040 familles, ~20 000 citoyens libres) et une politique qui maintient cette stationnarité

Gravure de Ambrosius Holbein pour une édition de 1518.
Dans le coin en bas à gauche le voyageur Raphael Hythlodaeus décrivant l'île.

Les mêmes idées sont retenues et développées par :

- *Aristote (384-322 av.J.-C.), La Politique*
- *Sir Thomas More (1478-1535)*
  Utopia, 1518, Londres (en latin), traduction française en 1550 à Paris: *l'Utopie ou le traité de la meilleure forme de gouvernement*
- *Tommaso Campanella* (1568-1639)
  Civitas solis, 1623, Francfort, (appendice à la Philosophia realis). Traduction française en 1841

الْكِتَاب الْمُخْتَصَر فِي حِسَاب الْجَبْر وَالْمُقَابَلَة .

Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala.
Al-Khwârismî (750-850)
Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

Croissance comme une propriété intrinsèque de la population

Pages 123- 124 du ***Liber abaci*** de la Bibliothèque Nationale Centrale de Florence (BNCF)

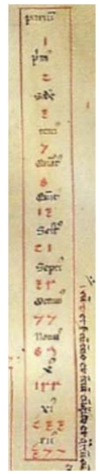
Problème de Fibonacci (XIII s.) : multiplication des lapins

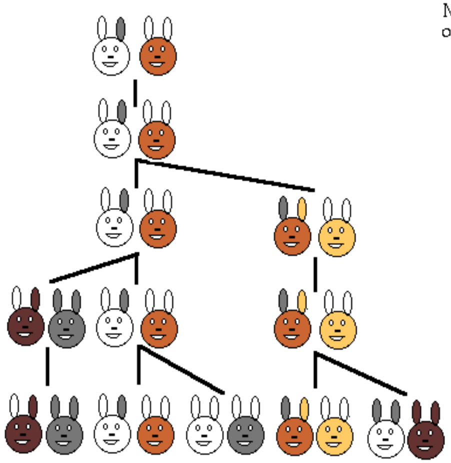
Leonardo Pisano, Fibonacci (*en italien : Figlio Buono Nato Ci*) ~1170 – ~1250 : ***Liber abaci***, (Livre des calculs) rédigé en 1202, on ne dispose qu'une édition de 1228…

La croissance de lapins (des arbres) :

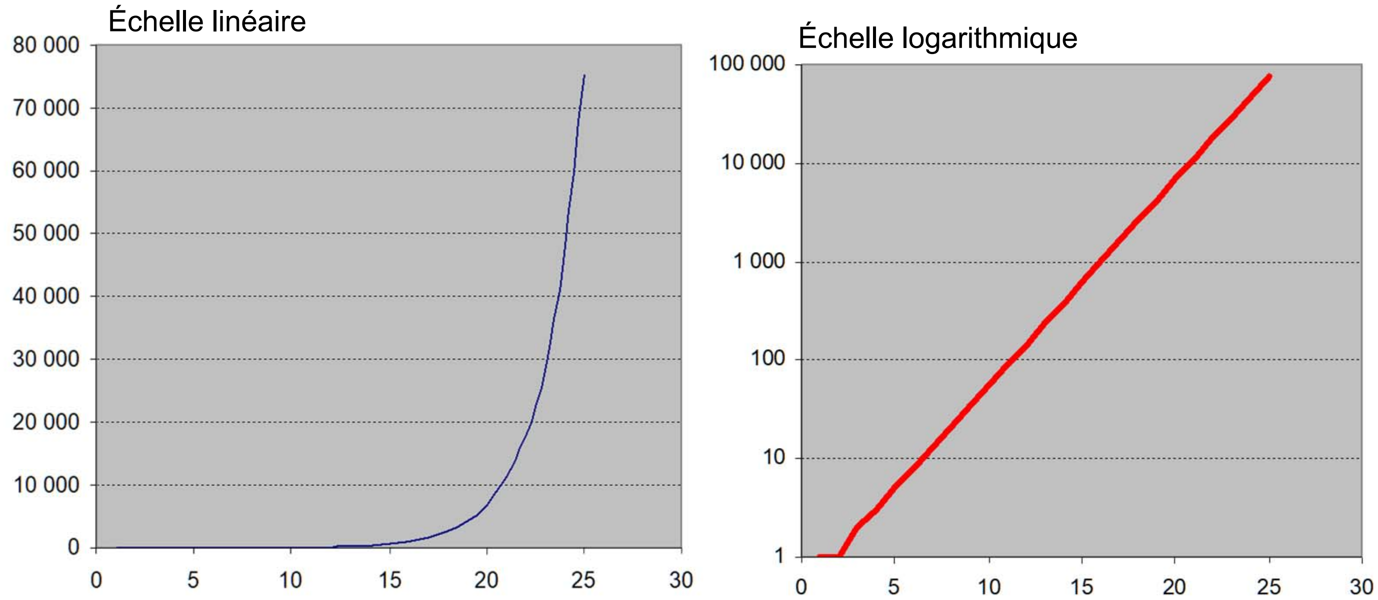
« Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on ***dans douze mois***, si chaque couple engendre un nouveau couple chaque mois à partir du second mois de son existence ? »

Réponse : 144 couples 1, 1, (1+1=2), (1+2=3), (2+3=5), …. = 1,1,2,3,5,8,13,21, etc… ($n_i = n_{i-1} + n_{i-2}$, $i>2$)





La croissance de lapins durant 25 mois (75 025 couples)



*La **suite de Fibonacci** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont :*
***0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21**, etc.*

La formule de Binet : $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{2\cdot\varphi - 1}$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}61803399$ (« nombre d'or »)

La Survie des humains est gérée par une loi (divine)

DIGESTORUM SEU PANDECTARUM /
LIBER TRIGESIMUSQUINTUS / TITULUS II.
AD LEGEM FALCIDIAM: *68. Aemilius- Macer au liv.2 sur la Loi du vingtième des successions*

« Ulpien prescrit la méthode suivante pour calculer les alimens faits à quelqu'un. Les alimens laissés à quelqu'un depuis le bas âge jusqu'a vingt ans sont réputés devoir durer trente ans, et on retient sur ces alimens la Falcidie en conséquence de ce calcul. Etc. »

Domitius Ulpianus,
juriste romain, 170—228

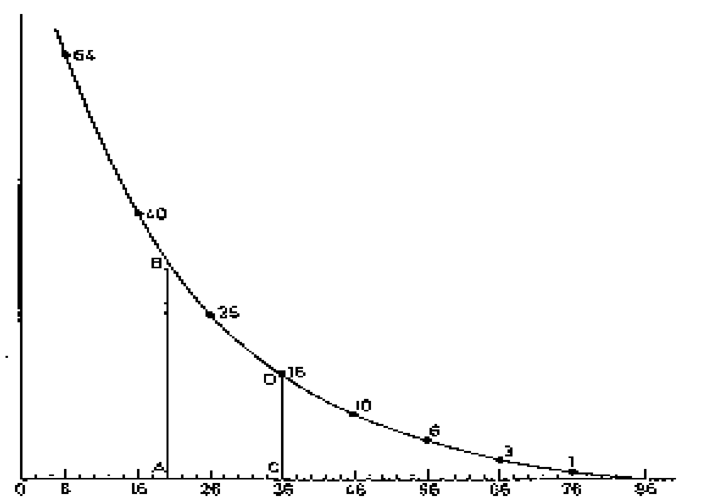
Âge du bénéficiaire	Durée de l'usufruit
0–19	30
20–24	28
25–29	25
30–34	22
35–39	20
40–49	(60-x-1)
50–54	9
55–59	7
60–	5

1662 – **John Graunt,** citoyen de Londres publie

Natural and Political Observations Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality

Viz. of 100 there dies

Within the first six years	**36**	**The fourth**	**6**
The next ten years, or Decad	**24**	**The next**	**4**
The second Decad	**15**	**The next**	**2**
The thrid Decad	**9**	**The next**	**1**



<u>1669 Christiaan Huygens (1629-1695),</u> <u>Netherlands</u>
La première représentation graphique de la fonction de distribution continue: la table de mortalité de John Graunt avec la démonstration comment peut-on trouver la durée médiane de vie après avoir atteint un âge donné

Rapport des sexes: une découverte de première importance

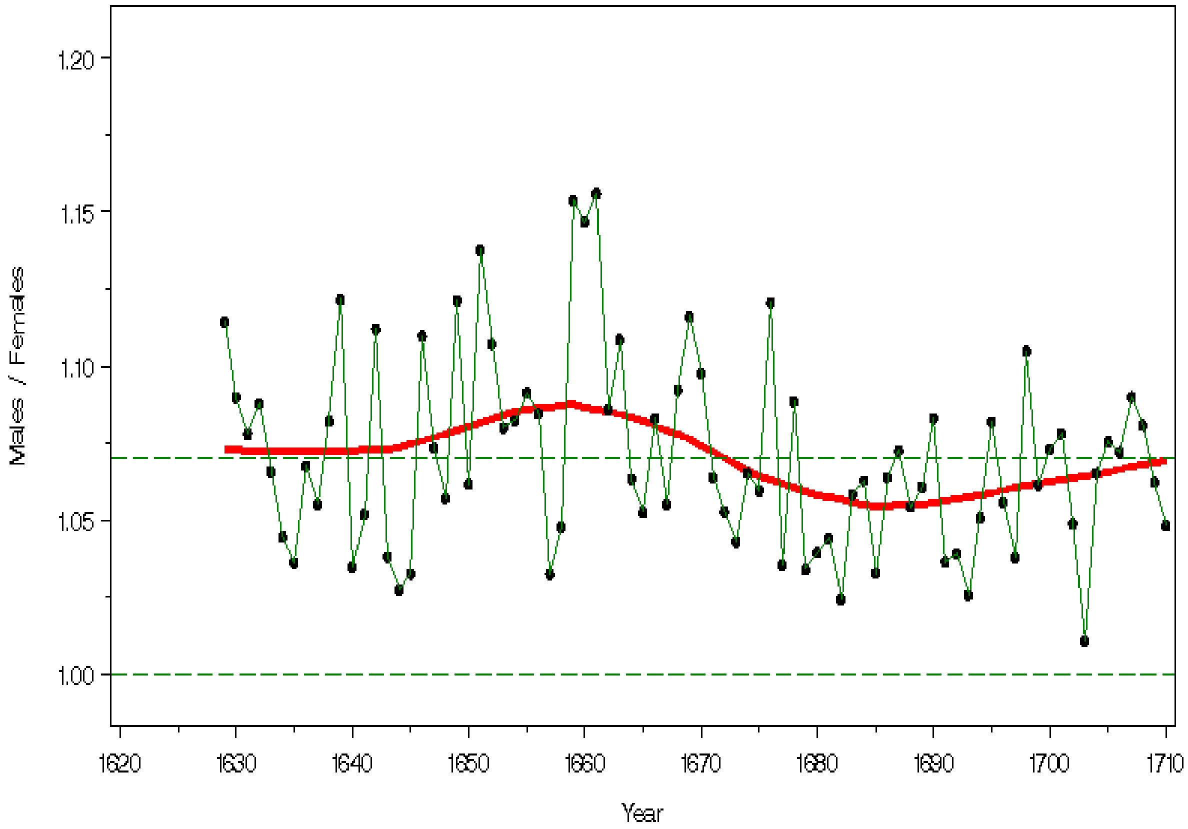
1711 - John Arbuthnot (1667-1735), Ecosse.

Il a réalisé le premier test statistique de signification (la différence entre les observations et une hypothèse « nulle ») pour démontre « the ***guiding hand of a divine »*** qui maintenait un rapport des sexe à la naissance presque constant à Londres en 1629-1710

Cette priorité est cependant contestée au profit de J.P.Süssmich, auteur de « L'ordre divine… » paru 40 ans après:

«Le pasteur Süssmilch a été le premier à tenter de traiter systématiquement la question du taux de masculinité, et il a introduit à ce sujet le constat que «pour 1000 fillettes nées, il vient 1050 garçons», une formule promise au succès parmi les démographes malgré ses problèmes évidents»

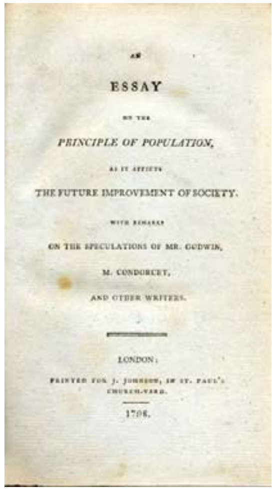
Source: Wikipeadia avec une référence à « Le sexisme de la première heure. Hasard et sociologie », Éric Brian et Marie Jaisson, *Raisons d'agir*, 2007, page 22



Notice historique :

Thomas Robert Malthus

(né le 13-14 février 1766 décédé le 29 décembre 1834)


AN ESSAY ON THE PRINCIPLE OF POPULATION, AS IT AFFECTS THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY. WITH REMARKS ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN, M. CONDORCET, AND OTHER WRITERS.

LONDON: PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

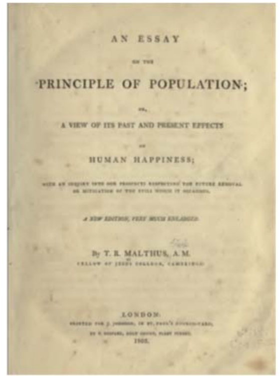
1798.

Première édition anonyme de 1798

Parcours académique :

en 1784 T.R. (Bob) Malthus est admis au *Jesus College de l'Université de Cambridge* en 1784 et y diplômé 1788, il obtient le grade de master en 1791 et élu le membre du Collège en 1793. En 1819 il est élu à la *Royal Society*, en 1821 devient le membre du *Political Economy Club*, en 1833 il est élu à *l'Académie Française des Sciences Morales et Politiques*

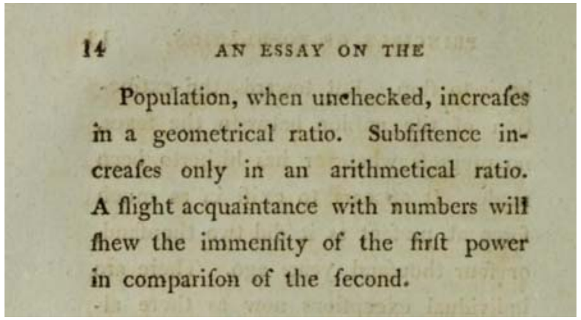
La première version de "*An Essay on the Principle of Population as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*" a été publié anonymement en 1798 par l'édition de J. Jonson, mais après son immense succès Malthus a décidé de la republier sous son nom en 1803.


AN ESSAY ON THE PRINCIPLE OF POPULATION; A VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS ON HUMAN HAPPINESS;

By T. R. MALTHUS, A.M.

LONDON

édition de 1803

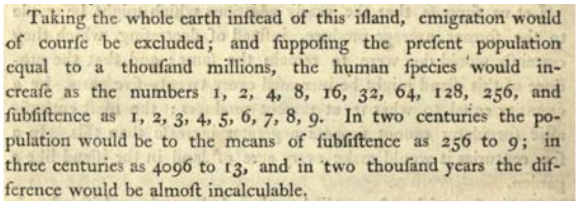

14 AN ESSAY ON THE

Population, when unchecked, increaſes in a geometrical ratio. Subſiſtence increaſes only in an arithmetical ratio. A ſlight acquaintance with numbers will ſhew the immenſity of the firſt power in compariſon of the ſecond.

Le premier paragraphe de la page 14 de l'édition de 1798 (Boston Public Library).

L'opposition de la loi de croissance de la population (humaine et non-humaine) à celle des moyens de subsistance sur la page 14 du premier chapitre dans la première édition anonyme de 1798.

"Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio. Subsistence increases only in an arithmetical ratio. A slight acquaintance with numbers will shew the immensity of the first power in comparison of the second".

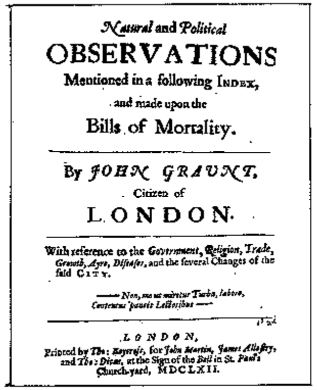

Taking the whole earth inſtead of this iſland, emigration would of courſe be excluded; and ſuppoſing the preſent population equal to a thouſand millions, the human ſpecies would increaſe as the numbers 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, and ſubſiſtence as 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In two centuries the population would be to the means of ſubſiſtence as 256 to 9; in three centuries as 4096 to 13, and in two thouſand years the difference would be almoſt incalculable.

Le deuxième paragraphe sur la page 8 de l'édition de 1803 (University of California Libraries)

Dans l'édition de 1803 déjà signée T.R.Malthus, les propos théoriques ont été développés et un exemple numérique a été ajouté à la fin du premier chapitre :

"Taking the population of the world at any number, a thousand millions, for instance, the human species would increase in the ratio of – 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. and subsistence as – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc. In two centuries and a quarter, the population would be to the means of subsistence as 512 to 10: in three centuries as 4096 to 13, and in two thousand years the difference would be almost incalculable, though the produce in that time would have increased to an immense extent."

Les lois de la population ou « l'ordre divin »


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.
With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said CITY.
—Non, me ut miretur Turba, laboro, Contentus paucis Lectoribus—
LONDON,
Printed by Tho: Roycroft, for John Martin, James Allestry, and Tho: Dicas, at the Sign of the Bell in St. Paul's Church-yard, MDCLXII.

<u>**John Graunt**</u> (24.04.1620 – 18.04.1674) *"Natural and political observations. Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality"* , 1662. ➔ origine de la science de démographie : espérance de vie à Londres était 27 years, avec 65% de décès avant l'âge de 16 ans (*il ne connaît pas le mot "population"*)

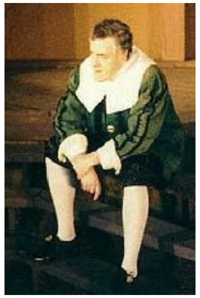
Johann Peter Süssmilch (03.09.1707-22.03.1767) «***Die göttliche Ordnung*** in den Veranderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung des selben erwiesen... » , 1741 Berlin, (*L'Ordre divin dans les changements du genre humain, prouvé par la naissance, la mort et la propagation de l'espèce*...),

L.Fibonacci
1202

Problème de la multiplication des lapins (progression)

Population (1612)

J.Graunt
1662



J.P.Süßmilch
1741

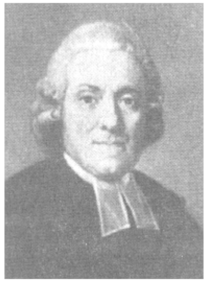
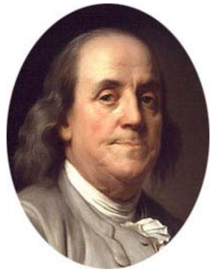


Table de mortalité, population stationnaire

Statistik (G. Achenwall, 1748)

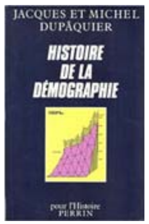
B.Franklin
1751



T.Maltus
1798

Croissance géométrique (exponentielle)

Démographie (1855)



<u>Lecture recommandée pour en savoir plus</u> : Jacques et Michel Dupâquier (1985) *Histoire de la démographie (Statistique de la population dès origines à nos jours)*, Paris, Edition Perrin, 462 p.

John Graunt, John Arbuthnott, and the human sex ratio. **Notice historique**

Campbell RB.

Source

Department of Mathematics, University of Northem Iowa, Cedar Falls 50614-0506, USA.

Abstract

John Graunt was the first person to compile data that showed an excess of male births over female births. He also noticed spatial and temporal variation in the sex ratio, but the variation in his data is not significant. John Arbuthnott was the first person to demonstrate that the excess of male births is statistically significant. He erroneously concluded that there is less variation in the sex ratio than would occur by chance and asserted without a basis that the sex ratio would be uniform over all time and space.

http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11512687

Hist Sci Med. 1996;30(4):459-66.

[Dr. John Arbuthnot, inventor of statistical testing].

[Article in French]

Bouckaert A.

Abstract

John Arbuthnot, Queen Anne's medic was very fond of probabilities and statistics expectations. Showing a great interest to new born's sex forecast, he devised a new way: the statistics. Then, he ruled out the case according to uncertain fluctuations connected with an average of 50% male births the excess of male births during 82 years in London. In that mind, he forged ahead to demonstrate Providence deed.

http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11625046

Notice historique

John Graunt (né le 24 avril 1620, mort le 18 avril 1674) était un riche mercier londonien, surtout connu pour avoir été avec son ami William Petty l'un des **premiers démographes**. Il analysa les registres de mortalité de la ville et se livra à la première estimation de la population d'une ville sur des bases statistiques. Le premier ouvrage de statistique et de démographie publié en **1662**: ***les Observations Naturelles et Politiques... sur les Bulletins de Mortalité...*** « Les bulletins de mortalité de Londres comptent parmi les premiers relevés démographiques.

« Graunt, lui, établit, chiffres à l'appui, qu'il y a un léger excédent masculin à la naissance et au décès; que Londres peut contenir 380 000 habitants, mais pas des millions; que Paris est plus peuplé que Londres; que les décès dus aux épidémies de peste sont compensés en deux ans; que, malgré les mortalités exceptionnelles, la population de l'Angleterre ne cesse de croître, et celle de Londres encore plus vite; que la mortalité est plus forte à Londres qu'en province et que la population londonienne n'augmente que grâce à une importante immigration; que la folie et la syphilis tuent beaucoup moins qu'on le dit, etc. »

Vilquin Éric. « Une édition critique en français de l'œuvre de John Graunt (1620-1674). Présentation d'un ouvrage hors collection de l'INED ». In: *Population*, 33e année, n°2, 1978 pp. 413-423.

William Petty (économiste, scientifique, médecin, philosophe, homme d'affaires, membre du parlement et de la Société Royale britannique), né 1623 et mort 1687, est surtout connu pour son ouvrage sur **l'arithmétique politique**, qui pose les bases de l'économie politique et **de la démographie** en quelque sorte de l'économétrie, en proposant l'utilisation des statistiques en matière de gestion publique. Ami de John Graunt, il lui avait suggéré l'idée de faire des recherches très ingénieuses sur les bulletins de mortalité sur Londres.

Thomas Robert Malthus, né 1766 et mort 1834, est un économiste britannique de l'École classique, et également un pasteur anglican. **La population s'accroit de manière géométrique alors que les biens ne s'accroissent que de manière arithmétique.**

Modèles de croissance

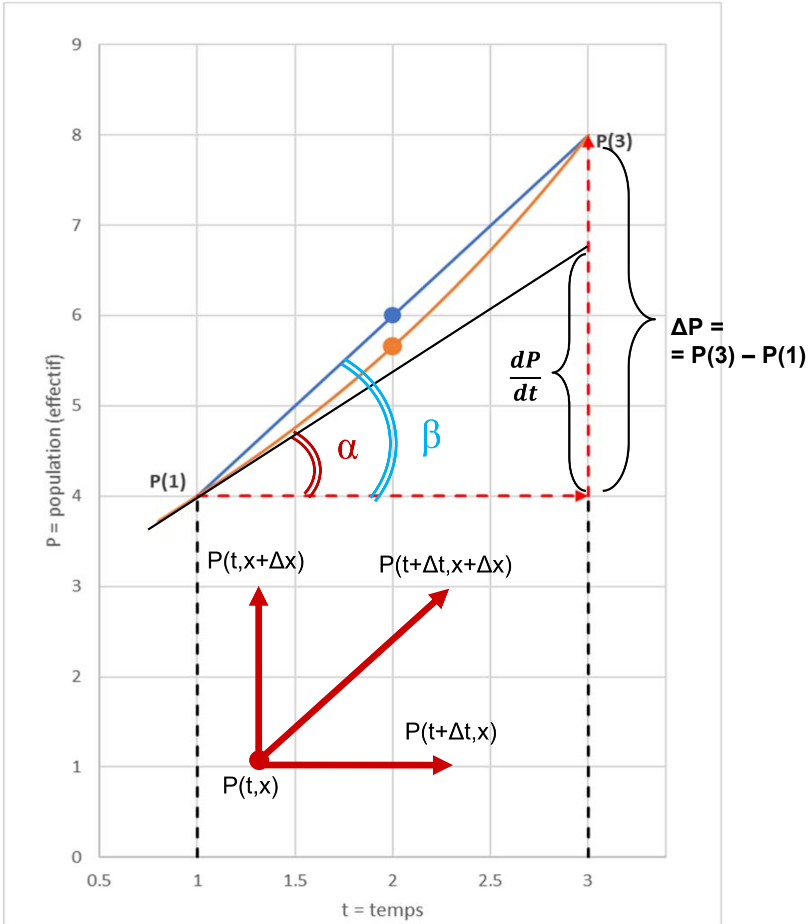
Population moyenne

Principes de modélisation de la croissance (de la variation)

Problème 1 : comment estimer l'effectif de la population entre les dates d'observation (i.e. entre deux recensements) ?

Problème 2 : comment prévoir la croissance de l'effectif à partir des observations historiques (série des données disponibles) ?

La croissance : approche en discret et en continu…



Observations:

l'accroissement de la population ΔP sur l'intervalle de temps Δt

$$\frac{P(3)-P(1)}{t(3)-t(1)}=\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} \rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P(t)}{\Delta t}=P'(t)=\tan\beta$$

$$r=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P(t)}{P(t)\cdot\Delta t}=\frac{P'(t)}{P(t)}=[\ln P(t)]' \rightarrow P(t)=e^{r\cdot T}$$

Soit $\boldsymbol{P(t)}$ – la fonction de l'effectif de la population

le taux d'accroissement s'exprime alors comme suit $\boldsymbol{r=\frac{dP}{dt}}$

Soit $\boldsymbol{P(t,x)}$ – la fonction de l'effectif de la population de $\boldsymbol{t}$ – période (temps universel) et de $\boldsymbol{x}$ – âge étant temps individuel que l'on peut écrire sous forme générique $\boldsymbol{P=f(t,x)}$

Donc la population varie dans la dimension $\boldsymbol{t}$ avec $\boldsymbol{x}$ constante comme suit : $r_t=\frac{dP(t,x)}{dt}\cdot\frac{1}{P(t,x)}$

dans la dimension $\boldsymbol{x}$ avec $\boldsymbol{t}$ constante comme suit : $r_x=\frac{dP(t,x)}{dx}\cdot\frac{1}{P(t,x)}$

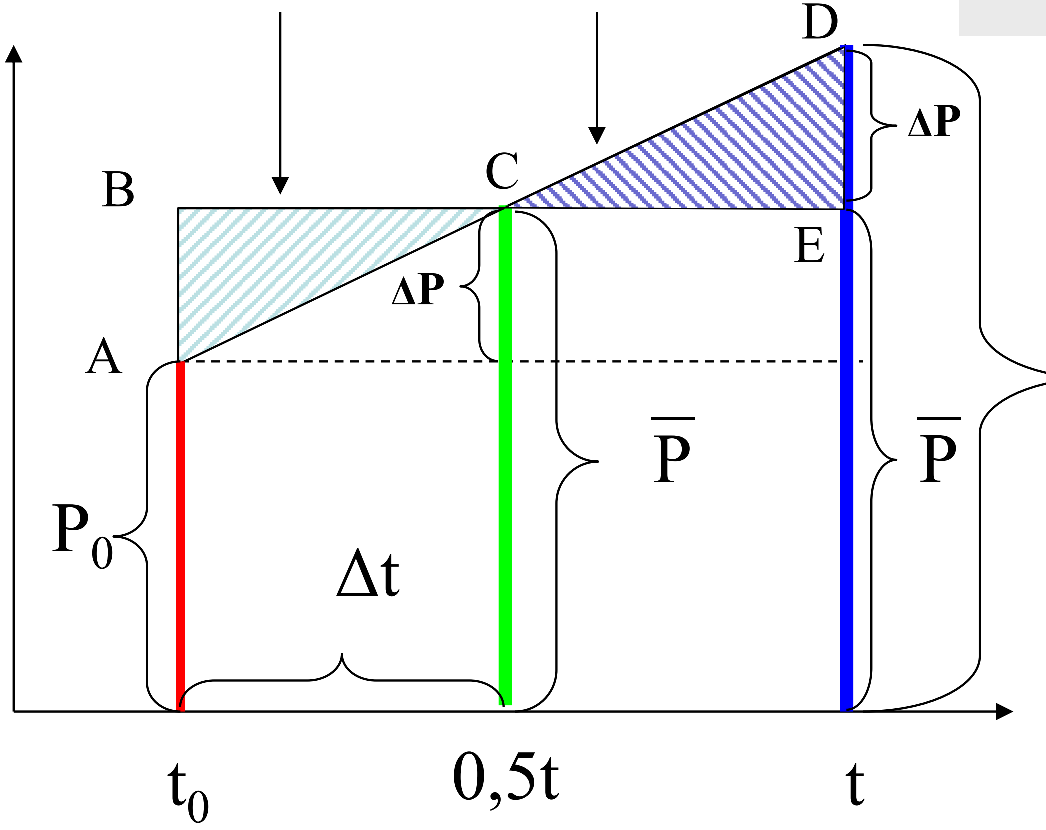
La variation de la population devient donc : $dP(t,x)=\frac{dP(t,x)}{dt}dt+\frac{dP(t,x)}{dx}dx$, etc. pour le développement voir EDM, p.111-115

Modèle de croissance linéaire

$$P_t = P_0 + \Delta P \cdot t$$

t – durée d'une période (une variable)
ΔP – la variation (une constante)

$$ABC = CDE \longrightarrow \Delta P = \frac{(P_0 - P_t)}{t} \longrightarrow \Delta P \cdot t = P_0 - P_t$$



$$\bar{P}_{0,t} \cdot t = \frac{P_0 + P_t}{2} \cdot t$$

Dans ce modèle la « population moyenne » sert pour une estimation correcte de nombre d'années vécues puisque la surestimation pour la première moitié est égale à la sous estimation pour la deuxième. ABC=CDE

$$\bar{P}_{0,t} = \frac{\sum_{t=0}^{T} P_t}{T} \longrightarrow \bar{P} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t P(t)dt$$

$$\bar{x} \cdot n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemple 1: Croissance de la population en progression arithmétique

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement (variable décroissante)	Accroissement (constant)
t	P_t	$P_{t,t+1}$	$r = (P_{t+1} - P_t)/P_{t,t+1}$	$\Delta P = (P_{t,t+1}) \times r$
0	100	120	0,3333	40
1	140	160	0,2500	40
2	180	200	0,2000	40
3	220	240	0,1667	40
4	260			
Total	*900*	*720*	*0,9500*	*160*
Moyenne sur 5(4)	180	180	0,2375	
Moyenne chronologique	180			
Moyenne sur extrémités	180		0,2500	
Moyenne géométrique			0,2295	

$$\bar{P}_5 = \frac{900}{5} = 180 \qquad \bar{P}_4 = \frac{720}{4} = 180 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0{,}5 \cdot (100 + 260) + 540}{4} = 180$$

$$\Delta P_{0,T} = 260 - 100 = 160 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 160$$

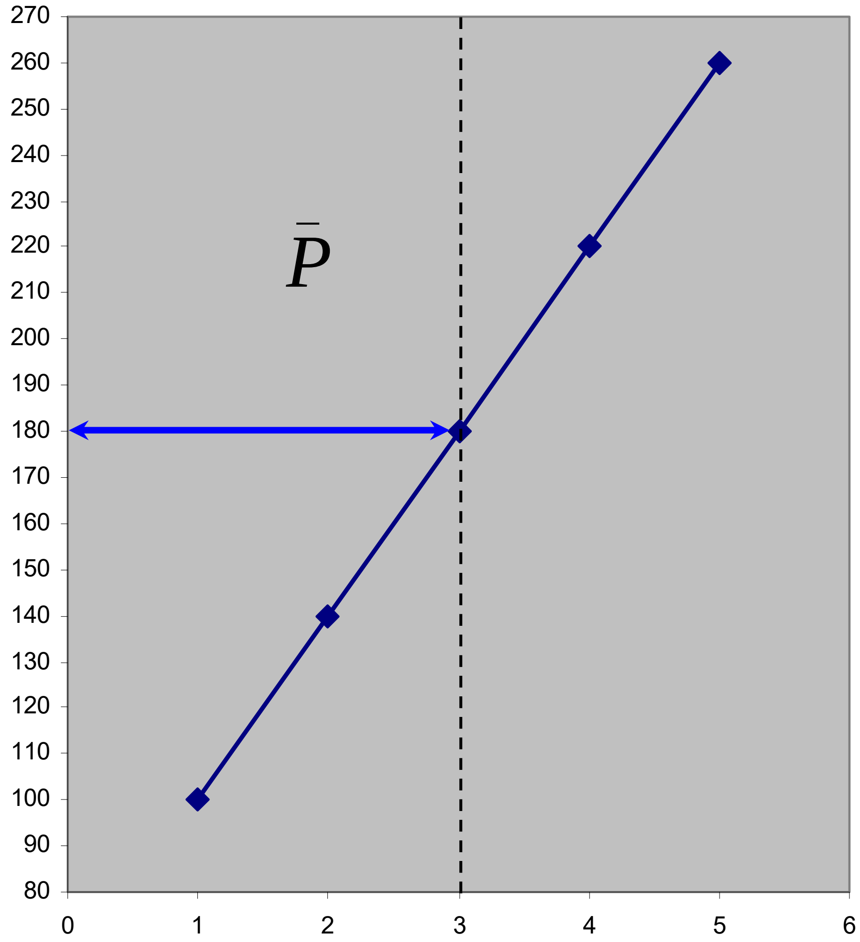
(0,3333+0,1667)/2=0,25
(0,3333*0,25*0,2*0,1667)^0,25=0,2295

(140-100)/120=0,3333
(180-140)/160=0,2500
120*0,3333=40
0,95/4=0,2375

Exemple 1 Présentation graphique

Population ➔ progression arithmétique **: Taux d'accroissement** ➔ progression géométrique

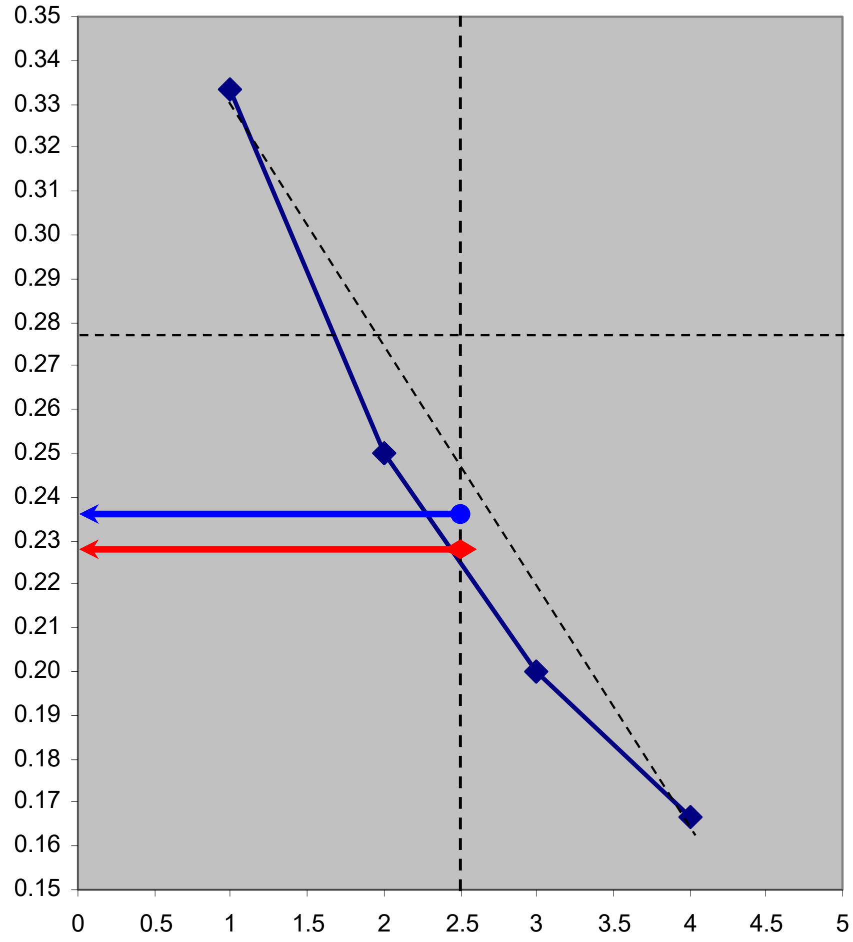
Croissance de la population



$$\bar{r}_a = 0{,}238$$

$$\bar{r}_g = 0{,}2296$$

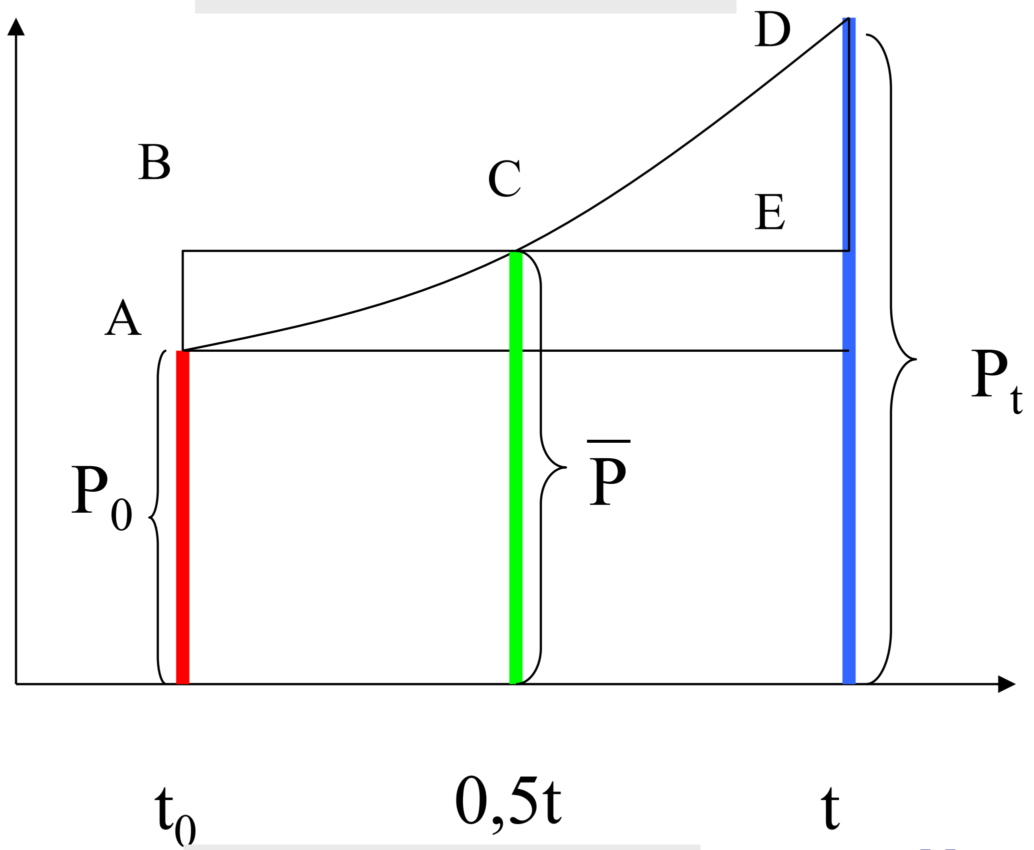
Taux d'accroissement



Populations « malthusiennes » : croissance non linéaire avec un taux accroissement constant

$$ABC \neq CDE$$

$$P_t = P_0 \cdot \left(\frac{P_\tau}{P_0}\right)^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{où}$$



$$\left(\frac{P_\tau}{P_0}\right)^{\frac{1}{\tau}} = (1+r);$$

r – *taux d'accroissement pendant la période* $[0, \tau]$

$$\bar{P}_{0,T} = \sqrt[T]{\prod_{t=0}^{T} P_t}$$

Moyenne géométrique

$$\exp(\bar{P}_{0,T}) = \frac{\sum_{t=0}^{T} \ln P_t}{T}$$

Exemple 2: Croissance d'une population « malthusienne » : une progression géométrique

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement		Accroissement
t	P_t	$P_{t,t+1}$	r = (Pt+1 -- Pt)/Pt,t+1		∆P = (Pt,t+1) x r
0	100	115	Le taux est constant puisqu'il ne vient pas de l'effectif, mais des qualités des individus dont une population est composée	0,2609	30
1	130	149,5		0,2609	39
2	169	194,4		0,2609	50,7
3	219,7	252,7		0,2609	65,91
4	285,6				
Total	*904,31*	*711,5*		*1,0435*	*185,61*
Moyenne sur 5(4)	180,9	177,88		0.2609	
Moyenne chronologique	177,9				
Moyenne sur extrémités	192,8	183,83			
Moyenne géométrique	169,0			0.2609	

$$\bar{P}_5 = \frac{904,31}{5} = 180,9 \qquad \bar{P}_4 = \frac{711,5}{4} = 177,88 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5\cdot(100+285,6)+518,7}{4} = 177,88$$

$$\Delta P_{0,T} = 285,6 - 100 = 185,61 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 185,61$$

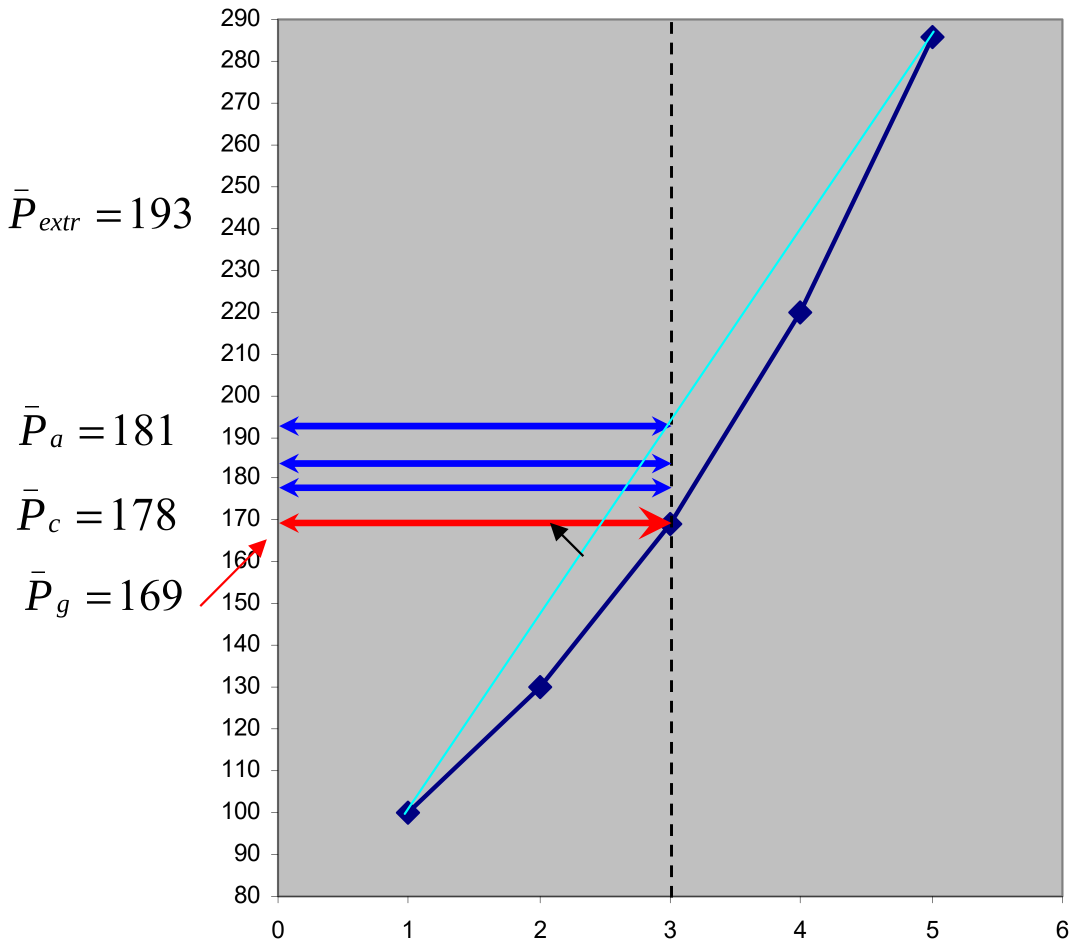
k: 130/100=1,3; 169/130=1,3; 219,7/169=1,3
(169+130)/2=149,5; (219.7+169)/2=194,4
(130-100)/115=0,2609; (169-130)/149,5=0,2609
*115*0,2609=30; 149,5*0,2609=39*

$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t} = 169 \qquad \bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^{T} \ln(P_t)}{T}\right) = 169$$

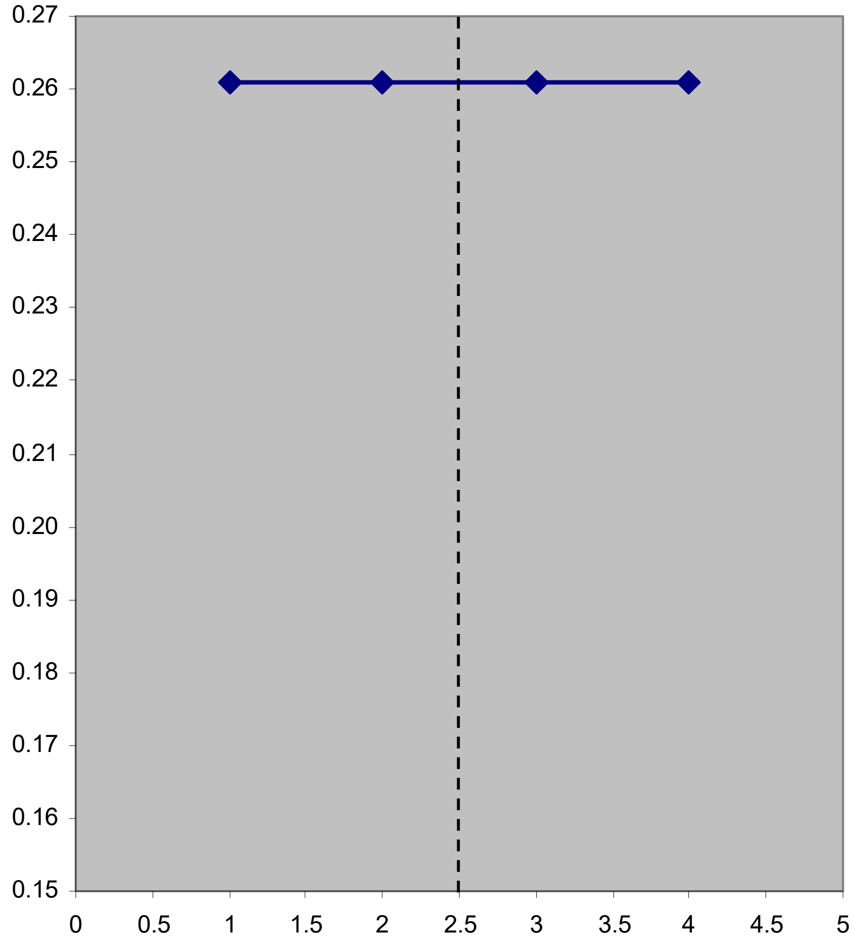
Exemple 2 Présentation graphique

Population ➔ progression géométrique **: Taux d'accroissement ➔** constant
« population malthusienne »

Croissance de la population



Taux d'accroissement



Mesurer la croissance d’une population : approche générale

1. Modèle avec le temps discret : Soit ***P(t)*** – effectif d’une population au moment ***t***, alors

$$P(t) = k \cdot P(t-1)$$

où ***k*** – taux de croissance,
si ***k* >1** → la population croît,
si ***k* = 1** → la population ne change pas, et
si ***k* < 1** la population diminue

Soit ***P(0)*** – effectif initial d’une population au moment ***t=0***, alors dans ***t*** quantités de temps on aura:

$$P(t) = k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k \cdot P(0) = \boxed{P(t) = k^t \cdot P(0)} \qquad (1)$$

2. Modèle avec le temps continu :

$$\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$$

si ***r*** > 0 → la population s’accroit,
si ***r*** = 0 → la population ne change pas, et
si ***r*** < 0 la population diminue

En intégrant par ***t*** on obtient :

$$\boxed{P(t) = e^{rt} \cdot P(0)} \qquad (2)$$

sachant que ***r = n – d***
n – les naissances normalisées (standardisées) pour une unité de la population (natalité)
d – les décès normalisés (standardisés) pour une unité de la population (mortalité)

La croissance d’une population dépend du rapport entre la natalité et la mortalité

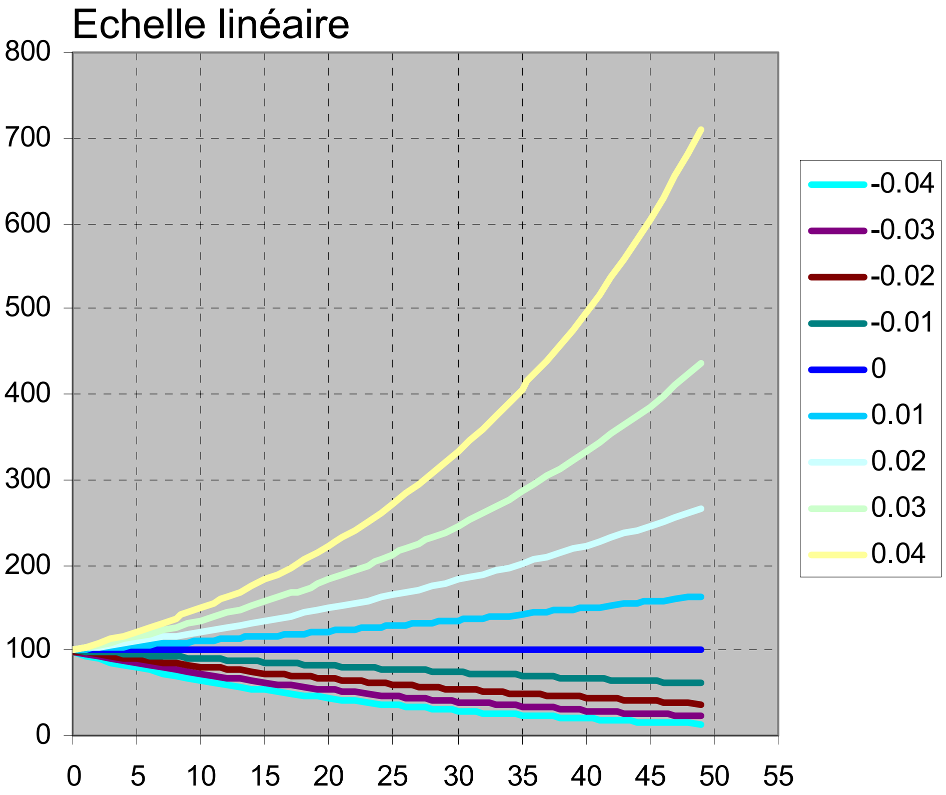
On voit que l’équation *(1)* et l’équation *(2)* sont identiques, alors *k=e^r^*, ou *k=exp(r)* (3)

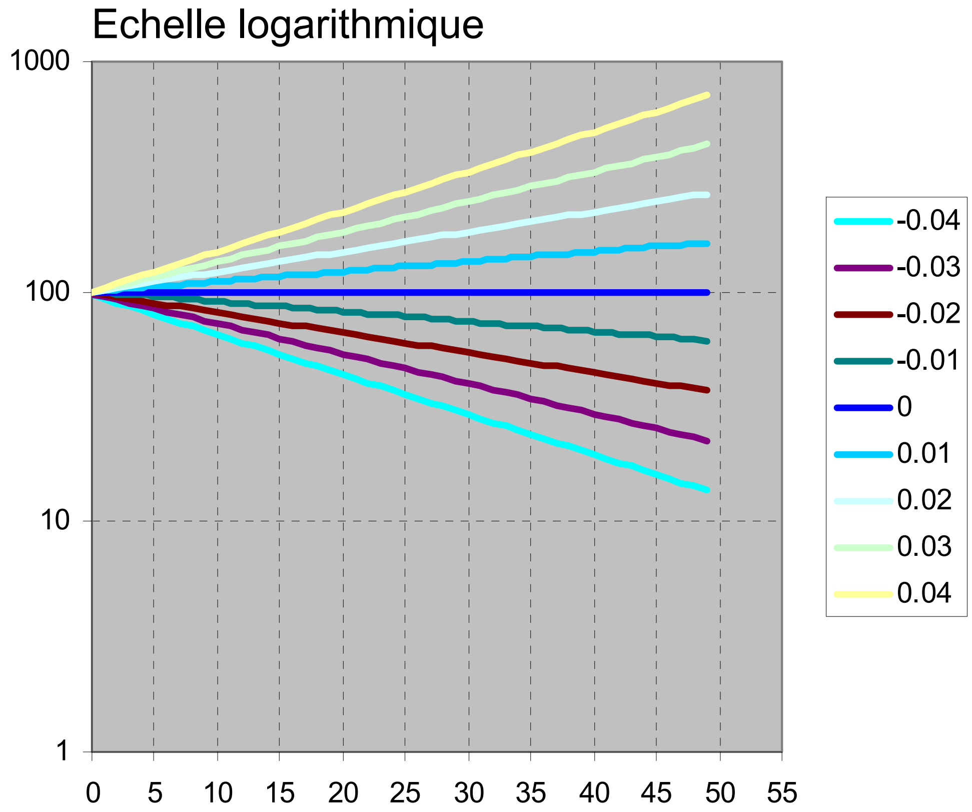
Cependant, cela (3) ne signifie pas que les deux modèles de croissances sont équivalents : population exponentielle croît plus vite, si r > 0 ; et elle décroît moins vite, si r < 0, que la population « géométrique » (modèle multiplicatif ou puissance)

temps	r = 0.005	k = 1.005	r = – 0.005	k = – 1.005
écoulé	exponentielle	puissance	exponentielle	puissance
0	100 000	100 000	100 000	100 000
10	105 127	105 114	96 079	96 069
50	128 403	128 323	77 880	77 831
100	164 872	164 667	60 653	60 577
150	211 700	211 305	47 237	47 148

Exercice : **vérifiez cette propriété**

Illustration: modèle de croissance avec le taux de accroissement constant





Période de doublement de l'effectif

$$\begin{cases} Si \quad P(t) = 2P(0) \Rightarrow 2 = e^{rt} \\ t = \dfrac{\ln 2}{r} \end{cases}$$

$$t = \frac{0.693}{r}$$

t=ln2/ln(k) **k=1,02=> 35,00**

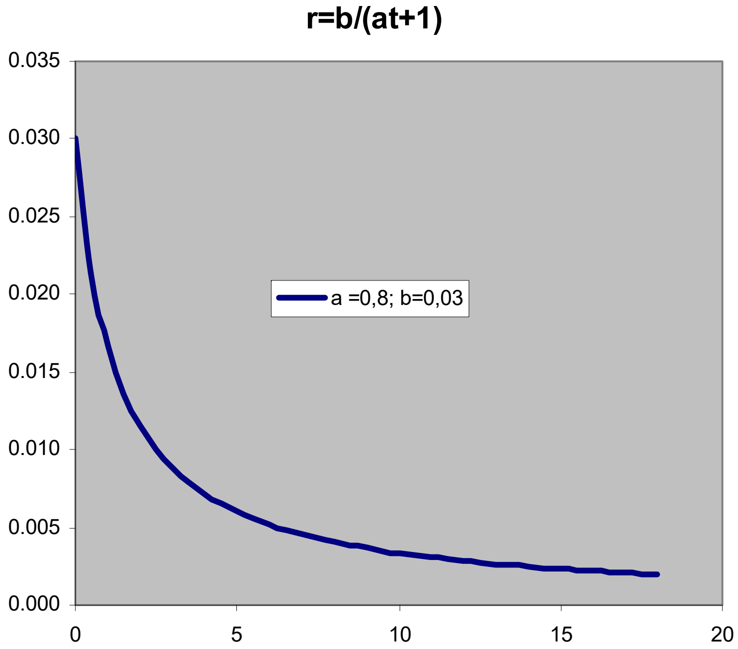
r=0,02=> 34,66

Modèle de croissance avec le taux d’ accroissement variable

Model de la population exponentielle avec le taux d’accroissement constant présente les populations qui n’ont pas de limites de la croissance. Cela n’est pas réaliste.

L’hypothèse: le taux de accroissement change dans le temps.

$$P_\tau = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_1 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_2 \cdot \Delta t} \ldots = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t + r_1 \cdot \Delta t + \Delta t + \ldots}$$



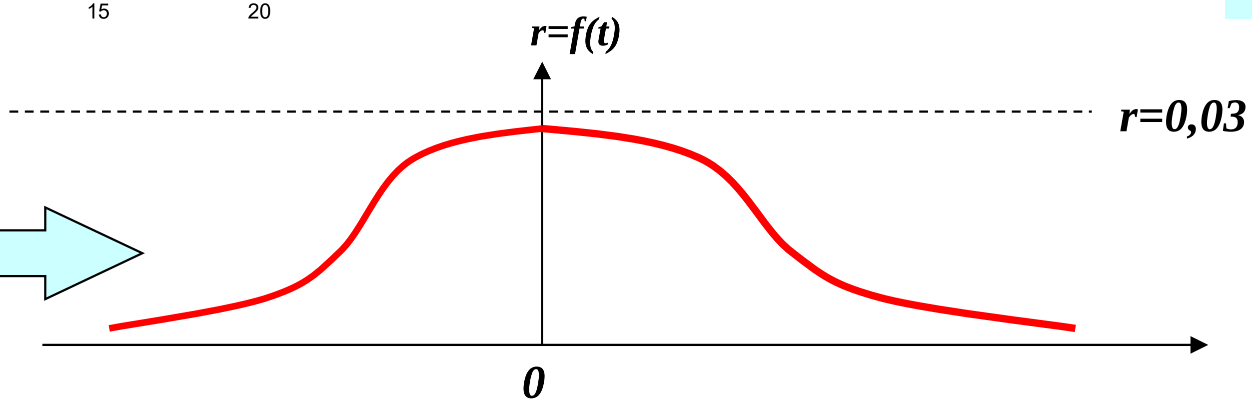
puisque $\Delta t \to 0$

$$P_\tau = P(0) \cdot e^{\int_0^\tau r(t)dt}$$

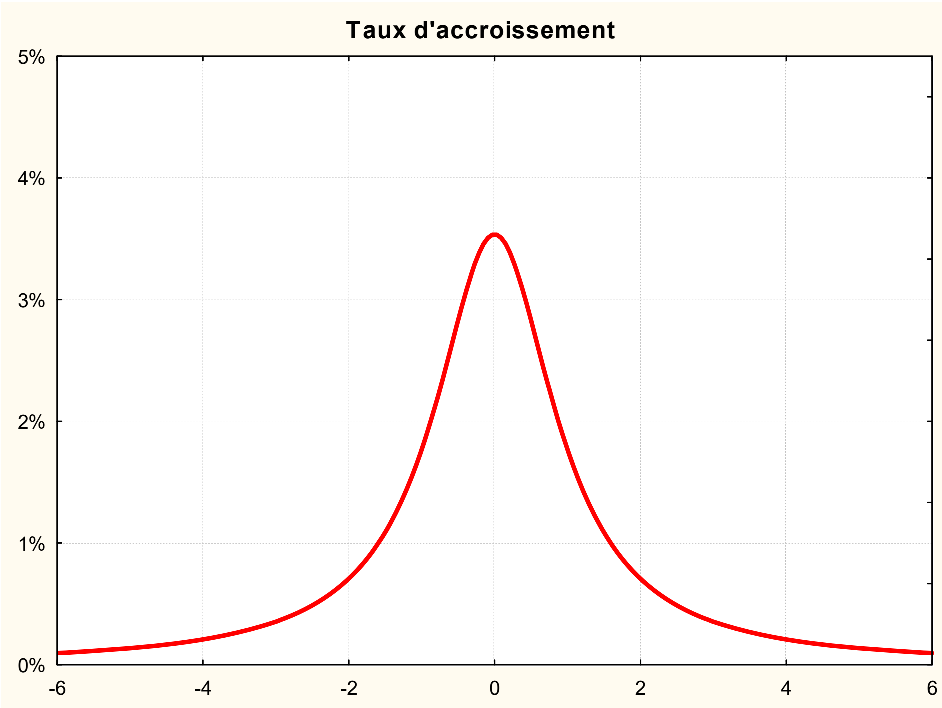
r ➔ peut être déterminé avec une fonction analytique ***r = f(t)***

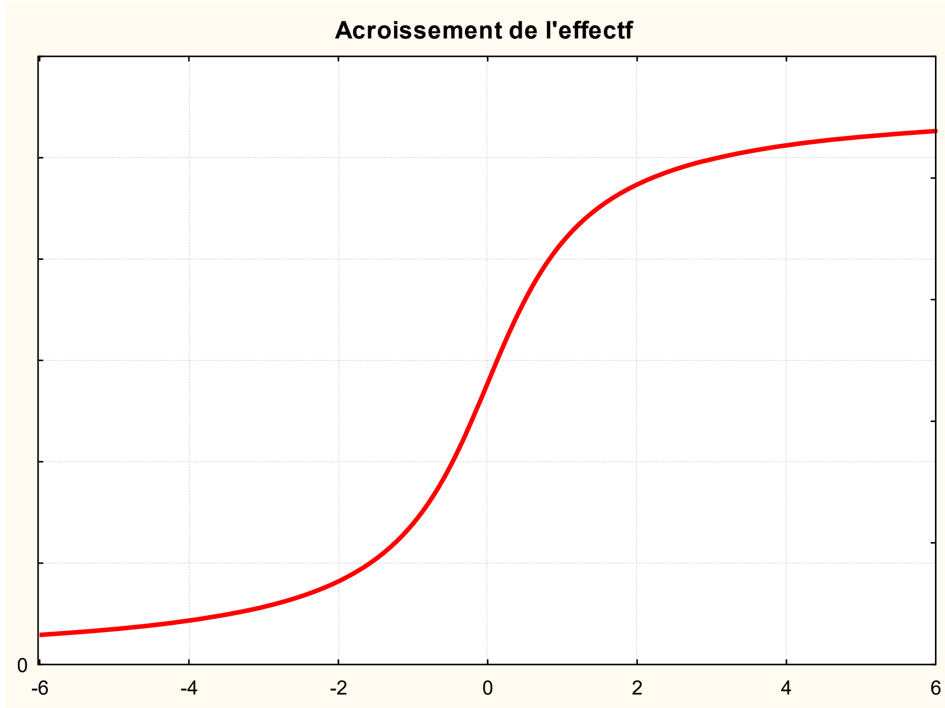
Table de mortalité

Transition démographique



Les limites d'accroissement : un modèle de la transition démographique





A la recherche des limites pour la croissance : un modèle avec l'effet de saturation – fonction logistique…

Adolphe Quételet (1796-1874) *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale.* Paris, 1835, t. I et II ***la résistance ou la sommes des obstacles pour la croissance est égale au carré de vitesse de la croissance de population…***

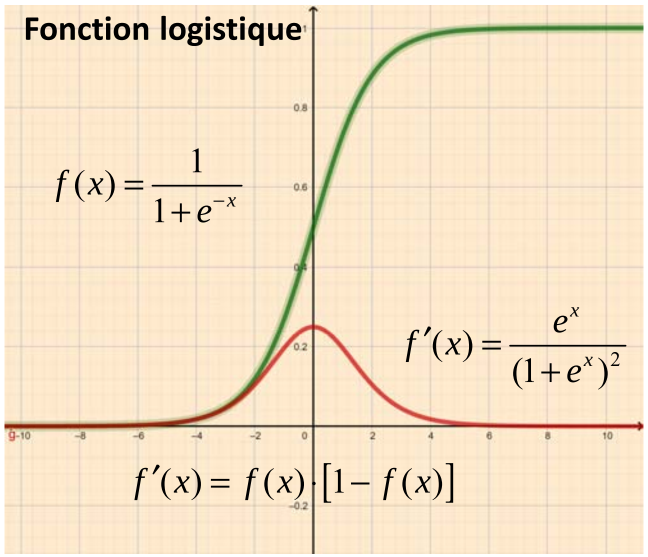
Pierre-François Verhulst (1804-1849): « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. » Dans: *Correspondance mathématique et physique publiée par A.Quételet.* Vol.XVIII, Bruxelles, 1847

La croissance de la population est freinée par une force proportionnelle au carré de l'effectif

$$\rightarrow dP(t) = \left[r \cdot P(t) - k \cdot P^2(t) \right] dt$$

La solution de cette équation donne une fonction logistique :

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{\alpha - r \cdot t}}$$



à deux paramètres (à part du taux accroissement ***r***)

K est la limite de croissance : $K = \frac{r}{k} \rightarrow \lim_{t \to \infty} P(t)$

α - paramètre déterminé par l'écart initial entre la *P(0)* et *K*

si $\alpha = 0 \ \rightarrow P(0) \approx 0{,}5K$

Modèle logistique

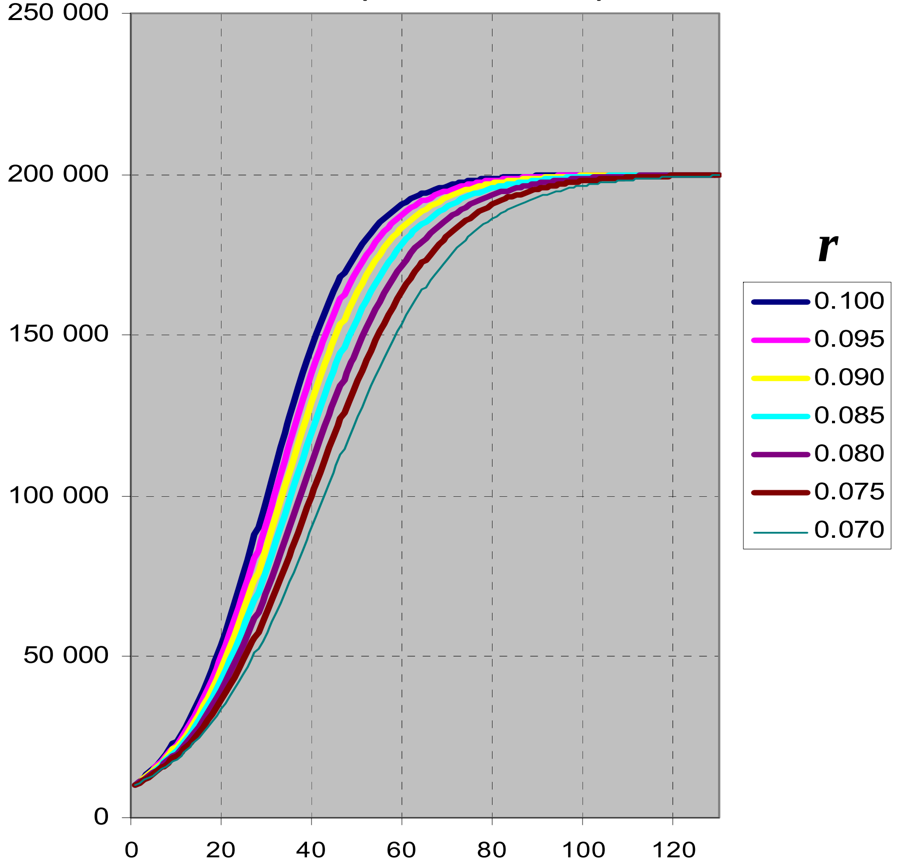
$$P(t) = \frac{K}{1+e^{\alpha - r \cdot t}}$$

K=200 000

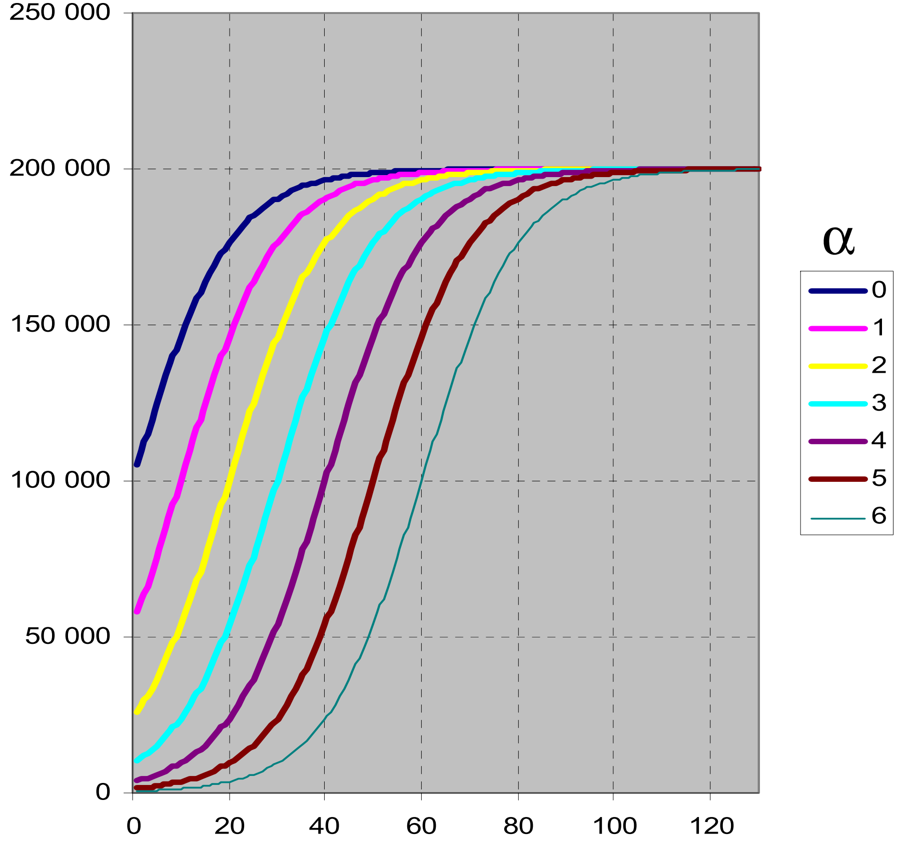
1. Les effectifs initiaux et finaux sont égaux, et les taux d'accroissement sont variables

2. Les effectifs initiaux sont différent, mais les effectifs finaux sont égaux et le taux d'accroissement est constant

α=3; r=(0,1;… 0,07)

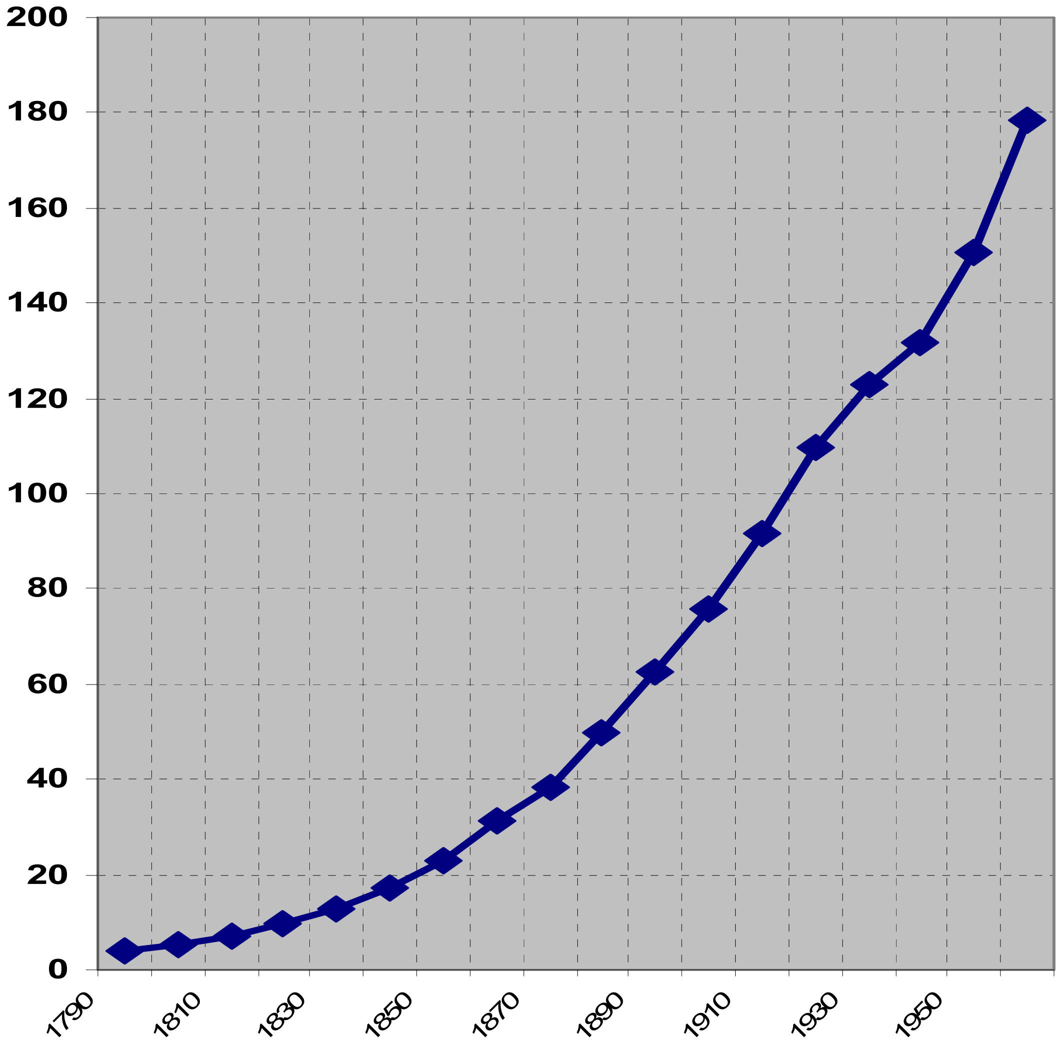


α=(0;…; 6); r=0,1



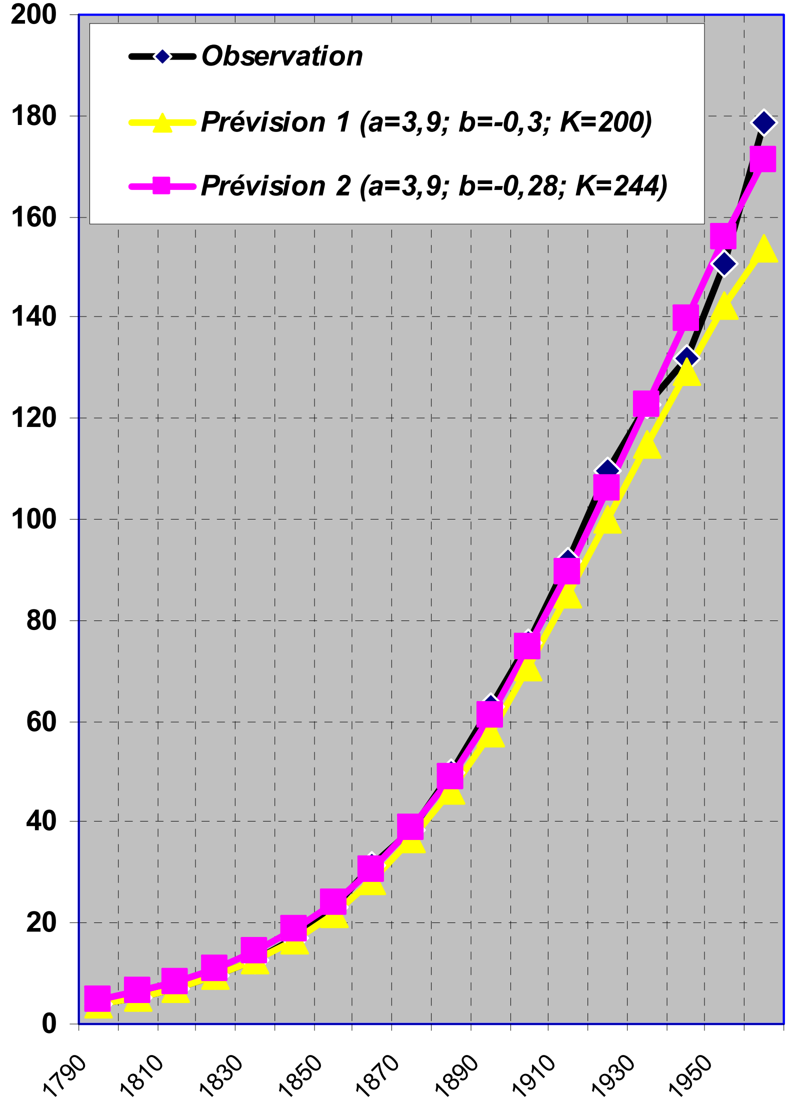
Application du modèle logistique : la croissance de la population des États-Unis depuis 1790

Année	Population	Décennie
1790	3.895	0
1800	5.267	1
1810	7.182	2
1820	9.566	3
1830	12.834	4
1840	16.985	5
1850	23.069	6
1860	31.278	7
1870	38.416	8
1880	49.924	9
1890	62.692	10
1900	75.734	11
1910	91.812	12
1920	109.806	13
1930	122.755	14
1940	131.669	15
1950	150.697	16
1960	178.464	17



Source: **A.Bühl, P.Zöfel** – *SPSS Version 10. Einführung in die modern Dateanalyse unter Windows*. Addison-Wesley, 2001, (Kapitel 16)

Croissance de la population des États Unis (application du modèle logistique)



$$P(t) = \frac{K}{1+e^{a+b\cdot t}}$$

b= -r

1. Estimation initiale des paramètres

Si t=0 et P(0) = 3,895

$$3{,}895 = \frac{200}{1+e^{a}} \Rightarrow a = \ln\left(\frac{200}{3{,}895} - 1\right) = 3{,}9$$

Si t=1 et P(1) = 5,267

$$5{,}267 = \frac{200}{1+e^{3{,}9+b}} \Rightarrow b = \ln(5{,}267 - 1) - 3{,}9 = -0{,}3$$

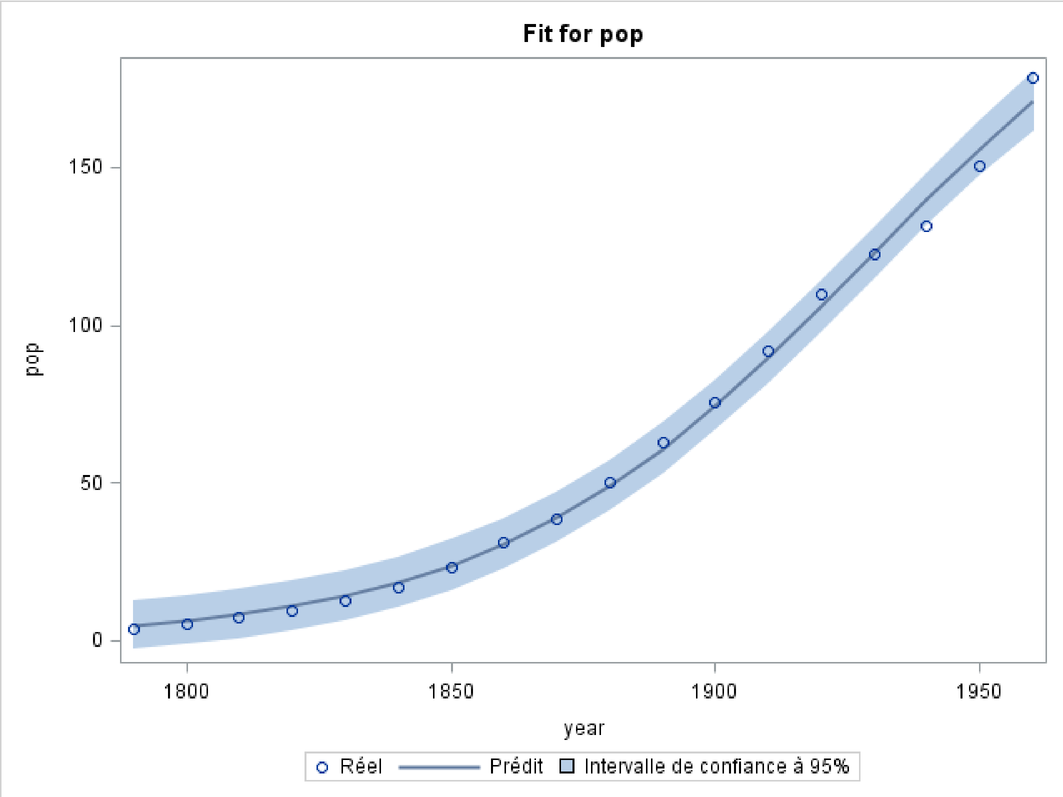
K=200 a= 3,9 b = – 0,3

2. Estimation des paramètres par interactions dans SPSS

K=244,013 a= 3,889 b = – 0,279

La croissance de la population des États-Unis depuis 1790 (données 1790-1960)

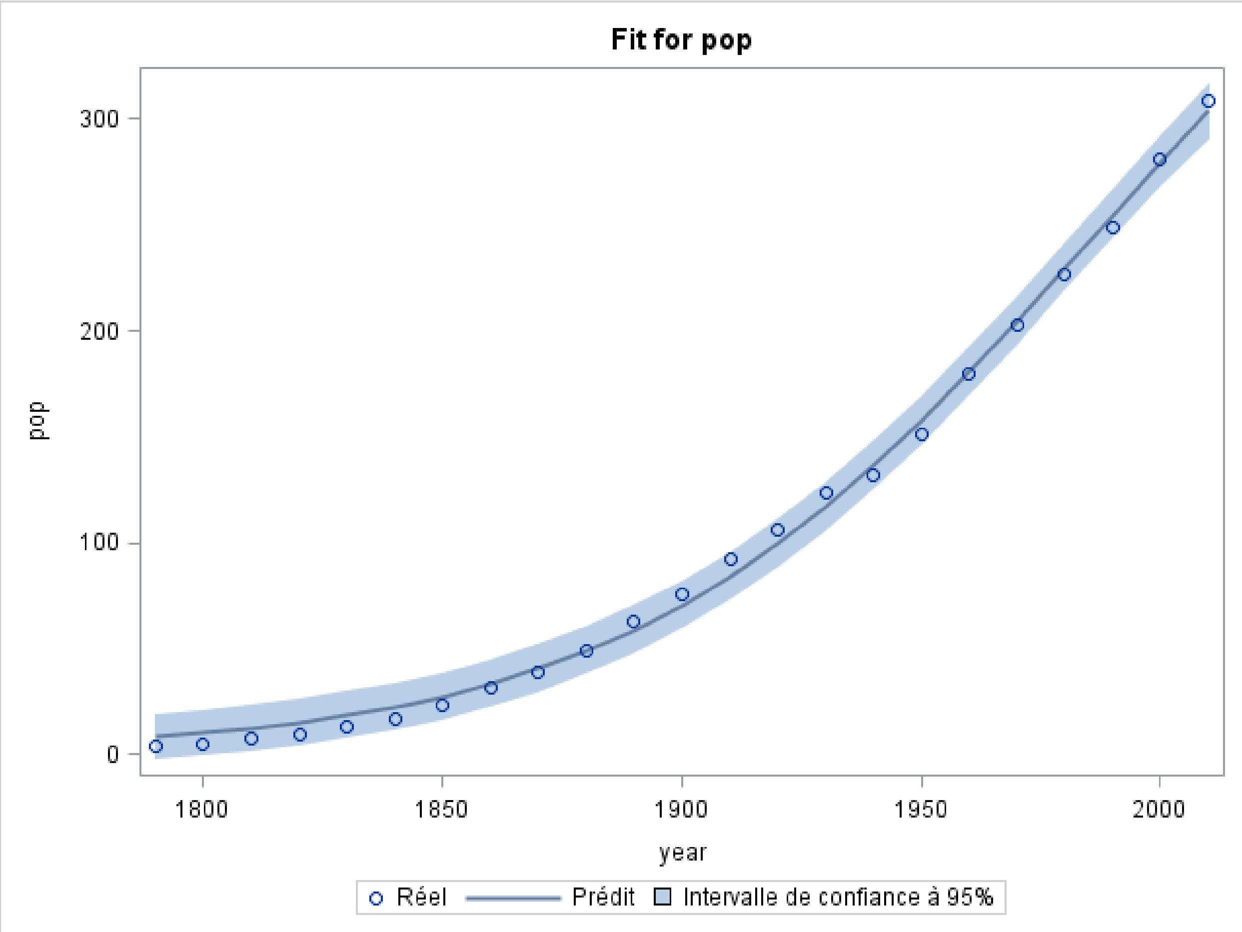
Estimation Parameter de OLS non-linéaires					
Parameter	**Valeur estimée**	**Err. type approchée.**	Valeur du test t	Approx. de Pr > |t|	Libellé
k	**244.0081**	**17.9740**	13.58	<.0001	Maximum Population
a	**3.888781**	**0.0937**	41.51	<.0001	Location Parameter
c	**0.027884**	**0.00156**	17.88	<.0001	



La croissance de la population des États-Unis depuis 1790 (données 1790-2010)

Estimation Parameter de OLS non-linéaires					
Parameter	**Valeur estimée**	Err. type approchée.	Valeur du test t	Approx. dePr > |t|	Libellé
k	**483.1532**	34.8552	13.86	**<.0001**	**Maximum Population**
a	**4.06382**	0.0640	63.48	**<.0001**	**Location Parameter**
c	**0.020861**	0.000894	23.33	**<.0001**	

SAS 9.4



Projections de population active 2003 – 2050 en France

applications du modèle logistique

Emmanuelle Nauze-Fichet, Frédéric Lerais, Stéphane Lhermitte *Projections de population active 2003 – 2050.* (Insee. Résultats. Société N°13 *p.5*

« *Le choix d'une forme logistique* est particulièrement adapté à la description des phénomènes *se diffusant progressivement dans le temps, avec une étape d'émergence, de développement et de saturation progressive*. Ce choix paraît pertinent pour la description des évolutions de comportements d'activité. »

$$trend(t, f, \sigma, t_i)(t) = \frac{p + f \cdot \exp[\sigma \cdot (t - t_i)]}{1 + \exp[\sigma \cdot (t - t_i)]}$$

avec

t – temps (0 en 1967);

p – le taux limite passé;

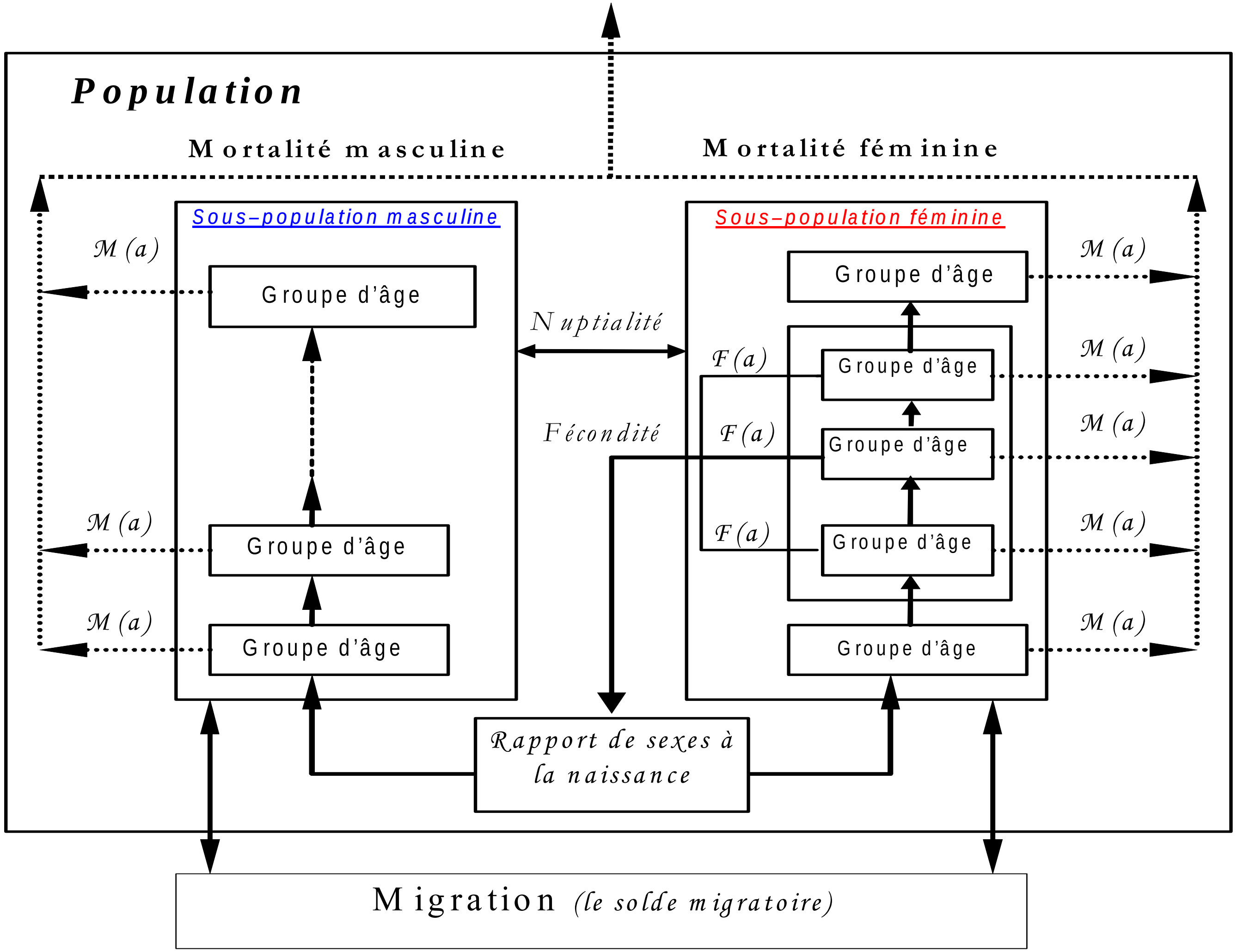
f – le taux limite futur ;

σ – la vitesse de diffusion,

t_i – la date d'inflexion

II. Modèles de l'évolution de structure par âge

population comme un système avec une structure complexe



Populations stationnaires.

Populations stables.

Potentiel d'accroissement des populations.

Populations semi-stables.

Populations quasi-stables.

Population stationnaire : une table de mortalité est un modèle d'une population avec la croissance zéro (r = 0)

Soit :

$\boldsymbol{m}$ → taux de mortalité = production de la mortalité par âge → fonction de mortalité $\mu(x)$

$\boldsymbol{b}$ → taux de natalité = production de la fécondité par âge → égale $\boldsymbol{m}$ par définition

$\boldsymbol{r}$ → taux d'accroissement est nul $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$ avec DL = 2 = (3-1) on a besoin que 2 paramètres

Dans les termes de table de mortalité l'effectif total d'une telle population → $T_0 = \sum_{x=0}^{\omega} L_x = S_0 \cdot e_0$

Puisque le nombre de naissances (S_0) = nombre de décès ($\sum d_x$) ,
les taux bruts s'expriment :

$$b = m = \frac{S_0}{T_0} = \frac{1}{e_0}$$

La structure par âge est constante et ne dépend que de la survie :

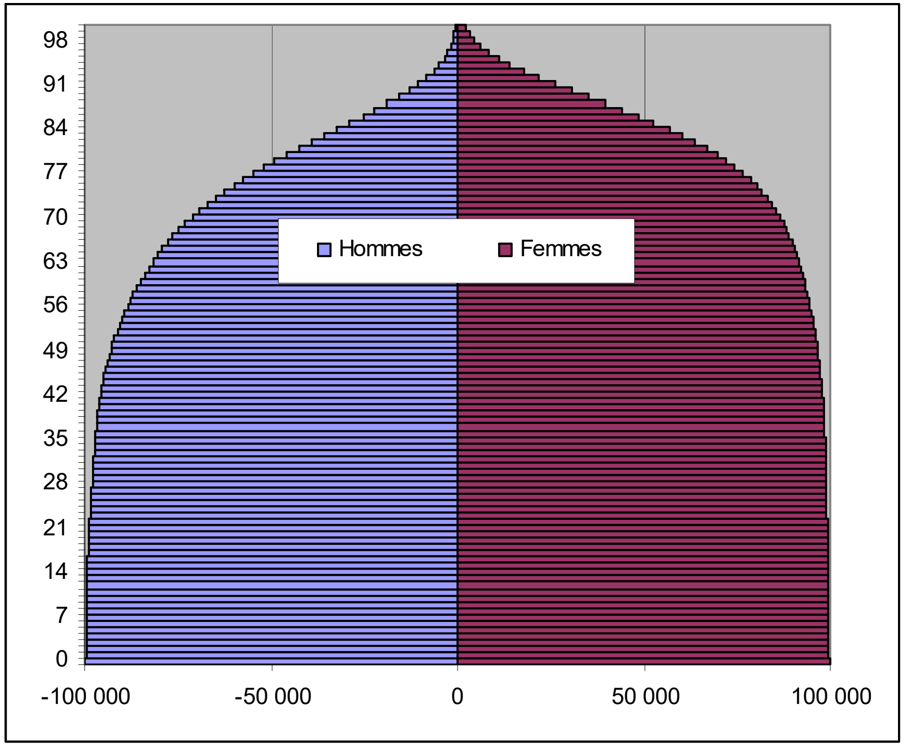
$$_nC_x = \frac{_nL_x}{T_0} = \left(\frac{1}{S_0} \cdot \frac{_nL_x}{e_0}\right) \equiv p_x$$

L'âge moyen d'une population stationnaire :

$$\overline{x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nC_x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{S_0 \cdot e_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{\sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{T_0}$$

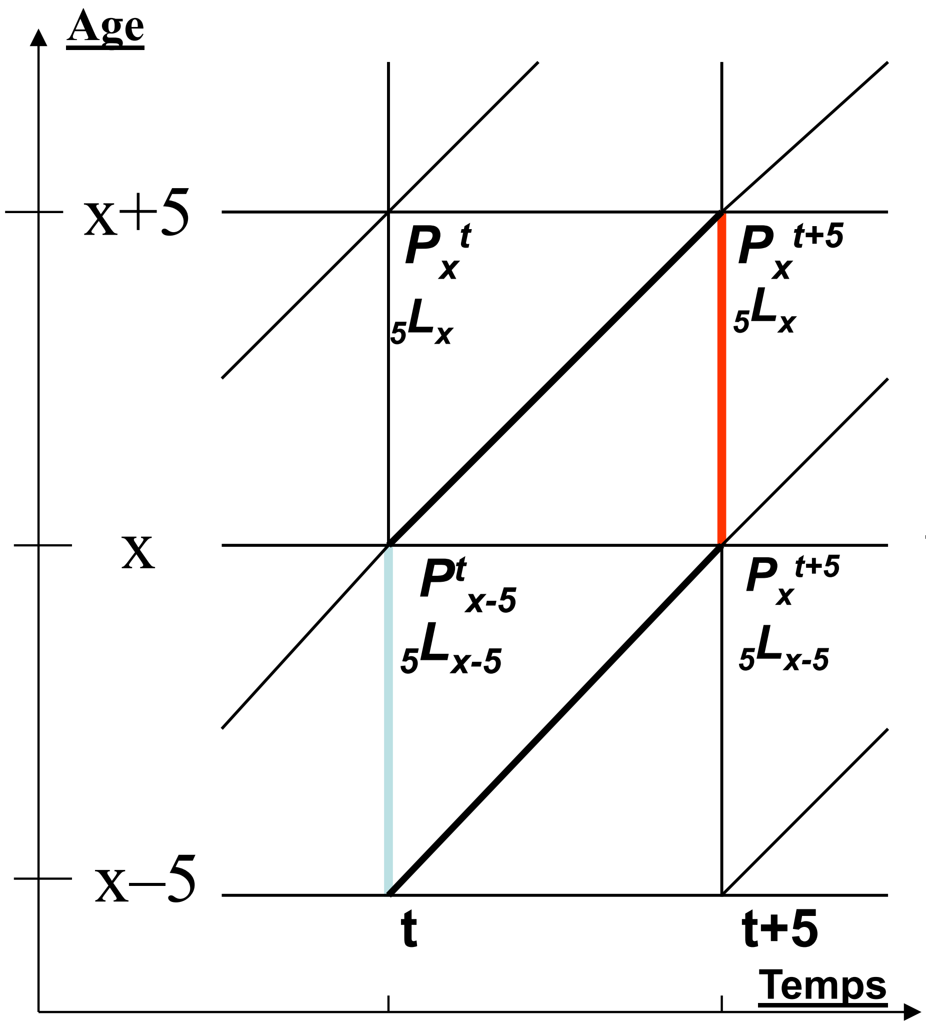
L'âge moyen d'une population stationnaire n'est pas égal à l'espérance de vie à la naissance.

Effectif des populations stationnaires (hommes et femmes) de la table de mortalité (France, 2000-2002)



Application de l'hypothèse sur la stationnarité: projection de la population

Projection des survivants vers la fin d'un intervalle de temps



$$_5P_x^F(t+5) = {}_5P_{x-5}^F(t) \cdot \frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}$$

$$\frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}$$

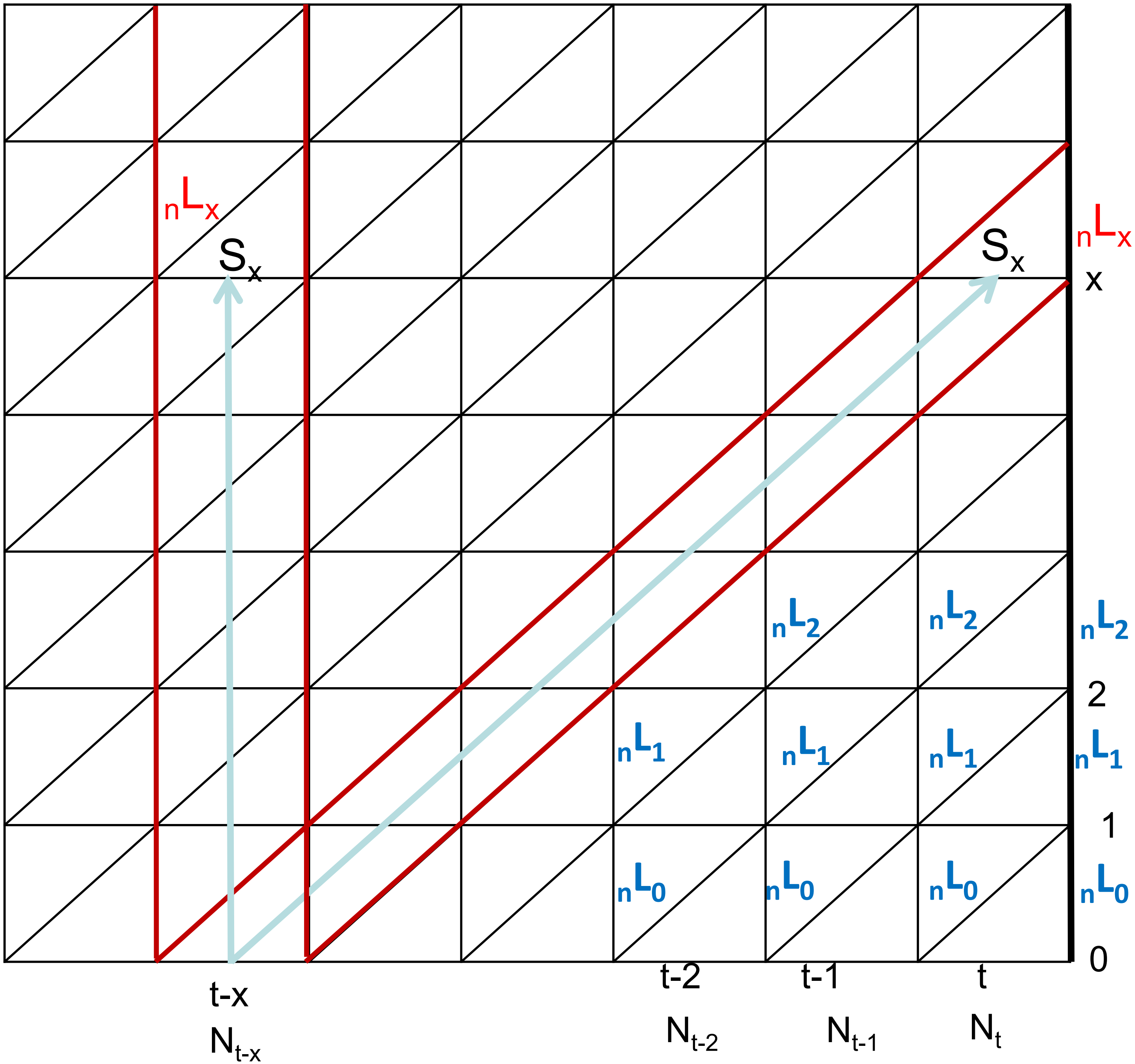
P_x^t l'effectif de la population à l'âge x au moment t

Le rapport de survie : la proportion de personnes à l'âge entre ***x-5*** et ***x*** restant en vie au bout de 5 ans **dans la *population stationnaire* correspondant à la table de mortalité.**

$$\frac{_5P_x^F(t+5)}{_5P_{x-5}^F(t)} = \frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}$$

L'hypothèse de la stationnarité – les conditions de la mortalité sont exactement décrites avec la fonction de mortalité ***μ(x)*** et la distribution de la population par âge à l'intérieur de l'intervalle de ***x-5*** à ***x*** est la même que la population stationnaire de la table de mortalité

Population stationnaire fermée



Soit

$\boldsymbol{p_x}$ – probabilité qu'un nouveau-né vive dans l'intervalle d'âge x, x+n;

$\boldsymbol{N_t}$ – nombre de naissance durant une année t

Sachant que dans la table de mortalité :

$$p_x = \frac{{}_nL_x}{S_0}$$

et dans la population stationnaire :

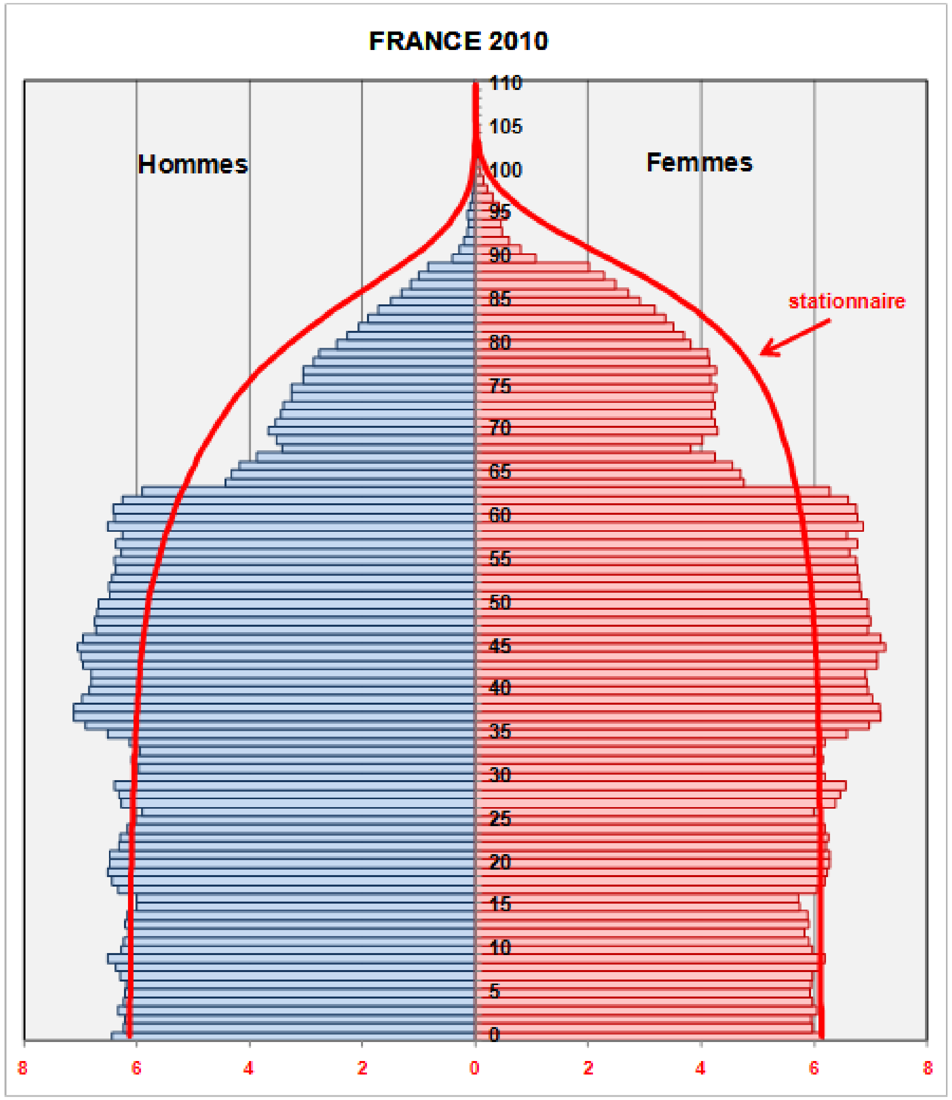
$$P_x = N_{t-x} \cdot p_x$$

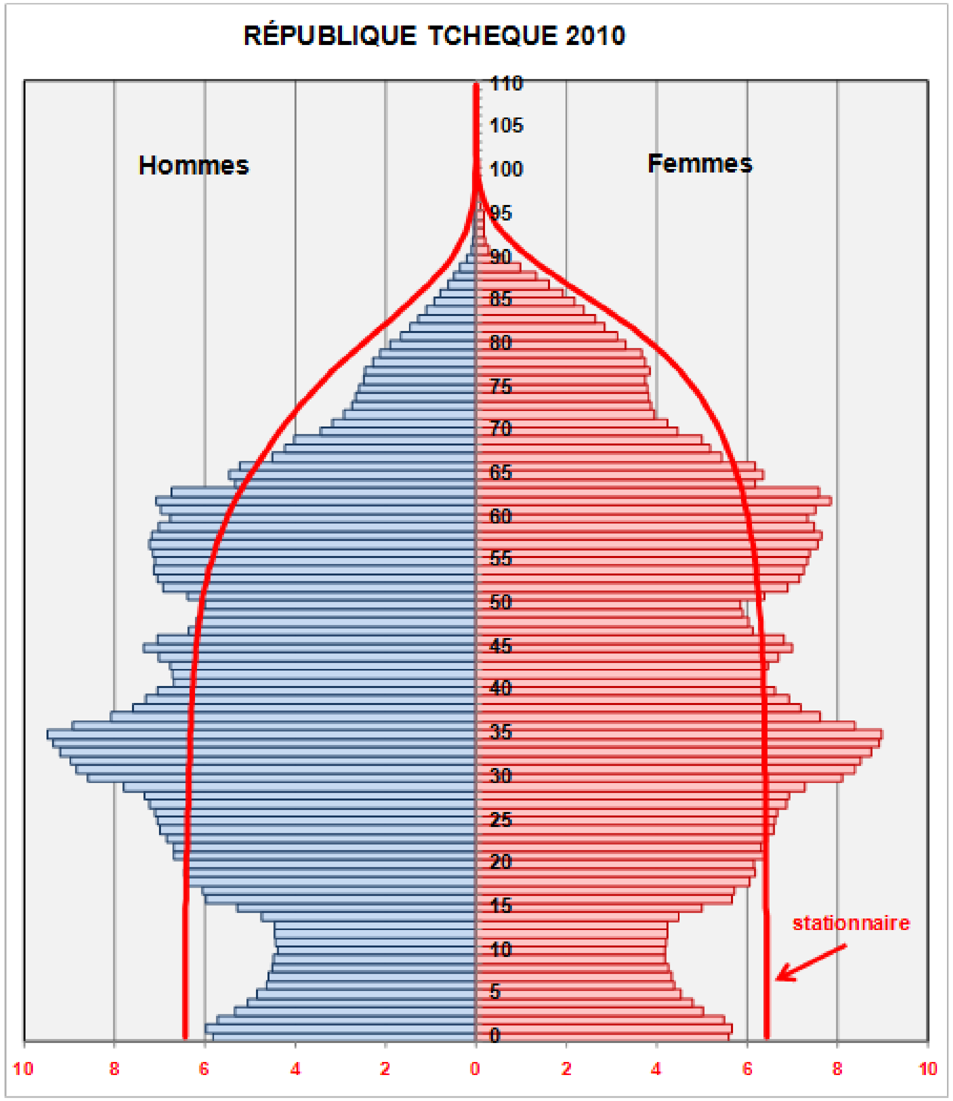
Le nombre de naissance est constant :

$N=N_t=N_{t-1}=N_{t-2}...N_{t-x}$

la structure par âge

$$P_x = N \cdot \frac{L_x}{S_0}$$





Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	78,04	84,72
b=m	12,81	11,80
moyenne simple		12,31
moyenne pondérée		12,29

Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	74,37	80,60
b=m	13,45	12,41
moyenne simple		12,93
moyenne pondérée		12,91

Le concept de population stable

Les populations stables sont celles qui s'accroissent à un taux constant; sont appelées aussi les populations malthusiennes (A. Lotka) ou plutôt exponentielles (aujourd'hui).

A. Lotka définit une population malthusienne comme une population dans laquelle la mortalité et la composition par âge restent invariables.

Demopaedia:

On démontre que si une *population fermée* se trouvait indéfiniment soumise à des ***lois invariables de mortalité et de fécondité selon l'âge***, cette population tendrait à se développer avec un *taux d'accroissement* constant, et à acquérir une ***structure par âge invariable***. Le *taux instantané* limite d'accroissement correspondant, appelé **taux intrinsèque d'accroissement naturel**, caractérise cette *population exponentielle* asymptotique, dénommée **population stable**. La composition par âge de la population stable, ou **composition par âge stable**, est indépendante de la **composition par âge initiale** de la population fermée considérée.

Le *taux intrinsèque d'accroissement naturel* correspondant à la mortalité et à la fécondité par âge observées dans une population est utilisé pour caractériser les virtualités de croissance impliquées par ces conditions de mortalité et de fécondité.

On appelle **population stationnaire** une *population stable* particulière dont le taux d'accroissement est nul.

http://fr-i.demopaedia.org/wiki/Population_stable

Présentation simplifiée d'une population stable (selon A. Lotka)

Soit

1) $\boldsymbol{N(t)}$ nombre de naissances vivantes croissant selon la loi exponentielle dans une population ***P*** avec un taux d'accroissement ***r*** :

$$N(t) = N(0) \cdot e^{rt}$$

$\boldsymbol{N(0)}$ est sans importance comme on a vu dans l'exercice sur la loi de croissance

2) $\boldsymbol{l(x)}$, ou $\boldsymbol{S(x)}$, une fonction de survie dans la même population ***P*** présentée par une table de mortalité hypothétique :

Age exact (x)	Fonction de survie $\boldsymbol{S(x)}$	Fonction de survie réduite $\boldsymbol{p(x) = S(x)/S(0) \leq 1}$ *
0	100 000	1,000
1	60 000	0,600
2	40 000	0,400
3	20 000	0,200
4	5 000	0,050
5	0	0,000

Exemple emprunté de Preston et al., p.139

3) Migration = 0

Population (*non-humaine*) au 1 janvier de 1800 à 1806[1)]

Age (a)	1/1/1800	1/1/1801	1/1/1802	1/1/1803	1/1/1804	1/1/1805	1/1/1806
0	1000	1000 e^{r}	1000 e^{2r}	1000 e^{3r}	1000 e^{4r}	1000 e^{5r}	1000 e^{6r}
1		600	600 e^{r}	600 e^{2r}	600 e^{3r}	600 e^{4r}	600 e^{5r}
2			400	400 e^{r}	400 e^{2r}	400 e^{3r}	400 e^{4r}
3				200	200 e^{r}	200 e^{2r}	200 e^{3r}
4					50	50 e^{r}	50 e^{2r}
5						0	0

Au 1 janvier 1805 le rapport entre les naissances et les autres groupes d'âge devient proportionnel à e^{-r}

$$\frac{600 \cdot e^{4r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0{,}6 \cdot e^{-r} \rightarrow \frac{P(1)}{N} = e^{-r} \cdot p_1$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0{,}4 \cdot e^{-2 \cdot r} \rightarrow \frac{P(2)}{N} = e^{-2 \cdot r} \cdot p_2$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{600 \cdot e^{4r}} = 0{,}667 \cdot e^{- \cdot r} \rightarrow \frac{P(2)}{P(1)} = e^{-r} \cdot {}_1p_1$$

Population stable

structure par âge révolu *(a)* est constante,
définie par un couple *p(a)* et *r*
la variation de l'effectif de chaque classe d'âge est définie par le facteur e^{r}

$$\boxed{P(a,t) = N(t) \cdot e^{-ra} \cdot p(a)}$$

en divisant par l'effectif total $\int P(a,t)da$ on obtient :

$$\boxed{c(a) = b \cdot e^{-ra} \cdot p(a)}$$

1) cf. Preston et al.(2001), p.139

Conditions d'une population stable :

1. le taux d'accroissement des naissances annuelles est constant
2. les taux de mortalité par âge (table de mortalité) sont constants
3. le solde migratoire = 0 dans tous les âges

Alfred Lotka (1939) a démontré que la **condition 1 ≡ taux de fécondité par âge sont constants**

(1) $$N(t) = \int_0^t P(a,t) \cdot f(a)da$$

a – l'âge (comme une fonction continue)

$N(t)$ – le nombre de naissance des filles au moment *t*

$P(a,t)$ – l'effectif (nombre) des femmes d'âge *a* au moment *t*

$f(a)$ – taux de fécondité féminine (naissances des filles uniquement)

sachant que $$P(a,t) = N(t-a) \cdot p(a); \quad t > 0$$

(2) on peut réécrire (1) → $$N(t) = \int_0^t N(t-a) \cdot p(a) \cdot f(a)da \; ; \; t > 50$$

(3) et puisque par définition → $$N(t) = N \cdot e^{\rho \cdot t}$$

(4) on peut substituer $\boldsymbol{N(t)}$ et $\boldsymbol{N(t-a)}$ dans (2) → $$N \cdot e^{\rho \cdot t} = \int_0^t N \cdot e^{\rho \cdot (t-a)} \cdot p(a) \cdot f(a)da$$

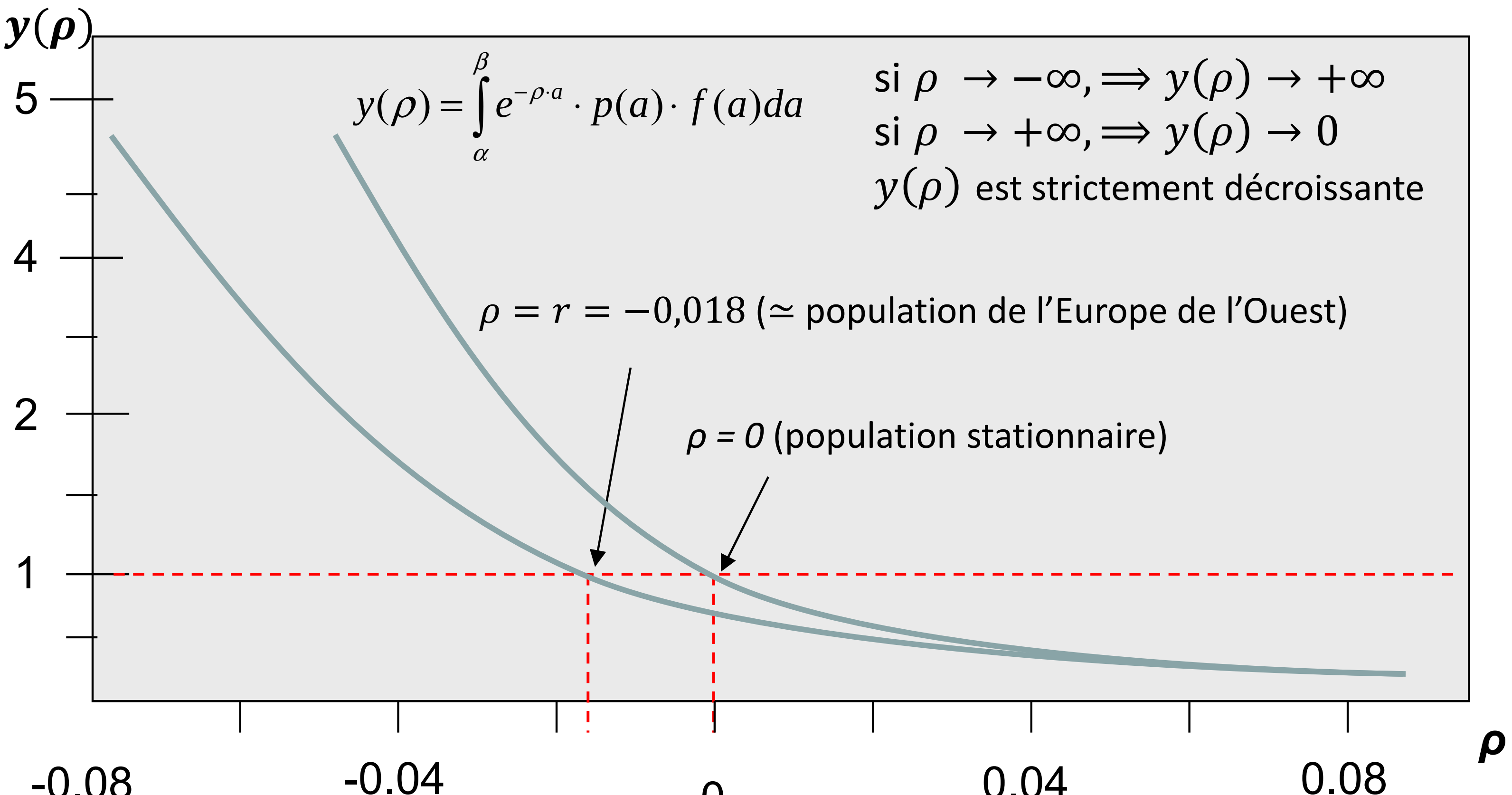
(5) et en divisant (4) par $\boldsymbol{N \cdot e^{\rho \cdot t}}$ on obtient

l'équation intégrale de reproduction de la population

(équation de Lotka)

$$\boxed{1 = \int_0^t e^{-\rho \cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a)da} \quad t > 50$$

Solution graphique de l'équation de Lotka



Solution unique pour (5) ➔ une seule racine réelle *ρ = r* → **taux intrinsèque d'accroissement**

(5a) $$1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho \cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a)da$$

α et ***β*** sont les limites naturelles de l'âge fécond

p(a) probabilité de survie de la naissance à l'âge ***a***

(5b) $$\boxed{1 = \sum_{x} e^{-r \cdot (x+0{,}5 \cdot n)} \cdot {}_nL_x \cdot {}_nf_x}$$

➔ *l'équation (5a) en application aux âges discrets avec* $S_0 = 1$

Conclusion : une seule et unique population stable correspond à chaque couple de *p(a)* et *f(a)*

Estimation du taux intrinsèque (Egypte, 1997); itérations

en trois itérations on obtient r = 1,475%

Source : Preston et al. (2001), p.149

Age (x)	(table de mortalité féminine) $_5L_x$	(fécondité féminine) $_5f_x$	(naissances de filles) $_5L_x * {}_5f_x$	$r_0 = 0.01569$	$r_1 = 0.01473$	$r_2 = 0.01475$	$r_3 = 0.01475$
				$_5L_x * {}_5f_x * exp[-rn(x+2.5)]$			
15	4.66740	0.00567	0.026464	0.02010998	0.02045166	0.02044383	0.02044413
20	4.63097	0.06627	0.306894	0.21561160	0.22033300	0.22022453	0.22022867
25	4.58518	0.11204	0.513724	0.33368930	0.34264172	0.34243557	0.34244342
30	4.53206	0.07889	0.357534	0.21471382	0.22153813	0.22138062	0.22138662
35	4.46912	0.05075	0.226808	0.12593024	0.13055968	0.13045258	0.13045666
40	4.39135	0.01590	0.069822	0.03584237	0.03733931	0.03730460	0.03730592
45	4.28969	0.00610	0.026167	0.01241901	0.01300011	0.01298660	0.01298712
		$\Sigma =$	1.5274	0.97400633	1.0005909	0.99997749	1.00000085

1) *AMM ≈ 27*

2) $$r_0 = \frac{\ln TNR}{AMM} = \frac{\ln\left(\sum_{x=15}^{45} {}_5L_x \cdot {}_5f_x\right)}{AMM}$$

$$\frac{\ln(1{,}5274)}{27} = 0{,}01569$$

3) $$y(r_n) = \sum_{x=15}^{45} e^{-r(x+2,5)} \cdot {}_5L_x \cdot {}_5f_x^F$$

exp(-0.01569*17.5)*0.026464 =0.02010998

4) $$r_{n+1} = r_n + \frac{y(r_n)-1}{AMM}$$

r1=0.01569+(0.97400633-1)/27=0.01473

r2=0.1473+(1.0005909-1)/27=0.1475

r3= etc…

Utilisation d'un chiffre 27 ou 25 ou 30 ans (âge moyen) n'a aucune conséquence sur l'exactitude du résultat final, et très peu même sur le nombre d'itérations nécessaire pour arriver au degré d'exactitude exigée. Également sans importance est la valeur du départ de la série d'approximation.

Approches de l'estimation du taux intrinsèque de croissance à partir d'une table de mortalité et les taux de fécondité par âge

Equation fondamentale du modèle de la population féminine stable *(unités d'âge)*

$$1 = \sum_x e^{-r\cdot(x+0.5)} \cdot L_x \cdot f_x$$

Soit r = **taux intrinsèque** d'accroissement (naturel), et R_0 = **taux net de reproduction**

Lotka : $\boldsymbol{\mu_1}$ étant l'âge moyen des mères ou la distance entre les générations

$$\mu_1 = \frac{\sum_x x_c \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{\sum_x L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}$$

en considérant le temps étant discret $(P_t = P_0 * r^t) \rightarrow$ $r = \sqrt[\mu_1]{R_0}$

$$r \approx \frac{\ln R_0}{\mu_1}$$

Kuczynski : $\alpha = \dfrac{R_1}{R_0}$ - moyenne $\quad \beta = \left(\dfrac{R_1}{R_0}\right)^2 - \dfrac{R_2}{R_0}$ - variance

$$R_0 = \frac{\sum_x L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

$$R_1 = \frac{\sum_x x_c \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

$$R_2 = \frac{\sum_x x_c^2 \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

$$r = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 2\cdot\beta\cdot\ln R_0)}}{-\beta}$$

x_c centre d'intervalle d'âge

Caractéristiques d'une population stable

Étant :

$$P(a,t)=N\cdot e^{r\cdot(t-a)}\cdot p(a)=\left(N\cdot e^{r\cdot t}\right)\cdot e^{-r\cdot a}\cdot p(a)\ \rightarrow\ \boxed{P(a,t)=N(t)\cdot e^{-r\cdot a}\cdot p(a)} \qquad (6)$$

En intégrant (6) par ***a***, on obtient : $\int_0^{\omega} P(a,t)da = N(t)\cdot\int_0^{\omega} e^{-ra}\cdot p(a)da$ (6a)

Soit $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{N(t)}}{\boldsymbol{P(t)}}$ – le taux (brut) de natalité, en substituant (6a) à $P(t)$, on obtient :

$$b=\frac{N(t)}{\int_0^{\omega} P(a,t)da}\Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-r\cdot a}\cdot p(a)da}} \qquad (7)$$

➔ **taux de natalité d'une population stable :** définie par ***r*** et ***p(a)***

Soit $\boldsymbol{c(a,t)}$ la structure (proportionnelle) par âge d'une population stable :

on substitue (6) à $P(a,t)$

$$c(a,t)=\frac{P(a,t)}{P(t)}=\frac{N(t)}{P(t)}\cdot e^{-r\cdot a}\cdot p(a)\Rightarrow \boxed{c(a)=b\cdot e^{-r\cdot a}\cdot p(a)} \qquad (8)$$

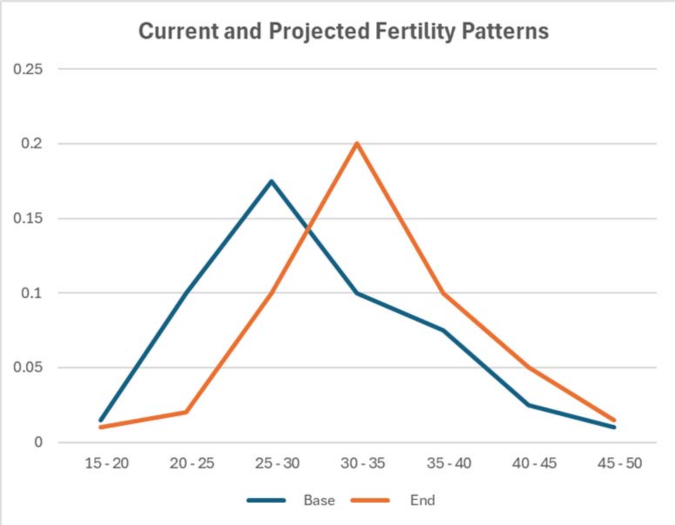
Propriété ergodique forte : la structure d'une population stable ne dépend que de sa mortalité et de la fécondité (taux par âge) =>
une population avec *p(a)* et *f(a)* constantes « oublie » sa structure initiale

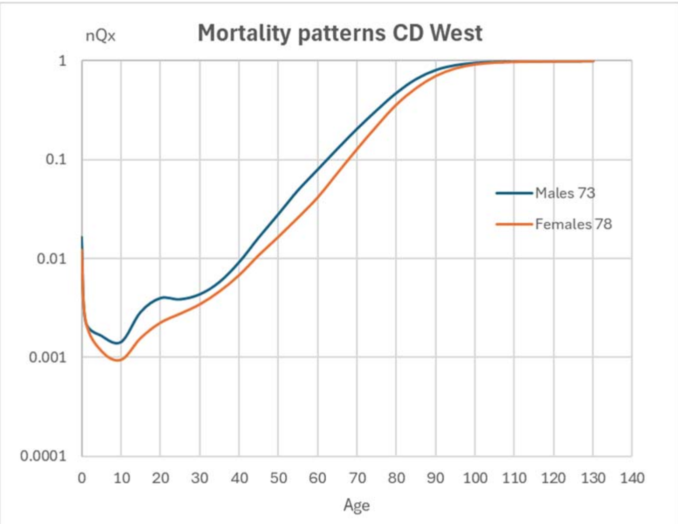
Propriété ergodique faible : les structures par âge des populations convergent, si leurs fonctions de survie *p(a)* et de fécondité *f(a)* évoluent dans la même direction

Illustration de la propriété ergodique des population stables

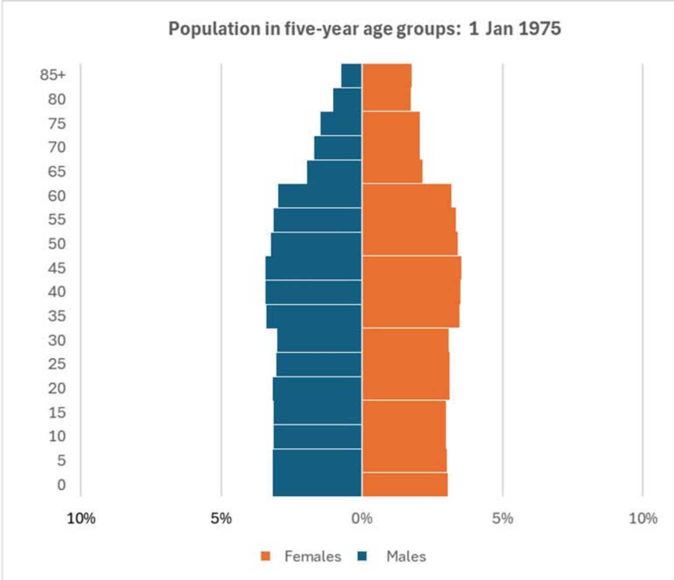
Résultats de la projection sur 100 ans de deux populations avec les structures initiales différentes

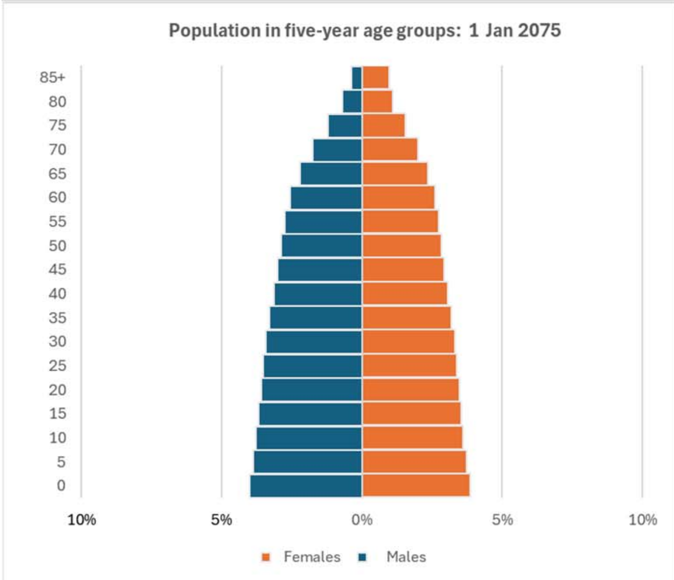
Hypothèses sur la fécondité et la mortalité



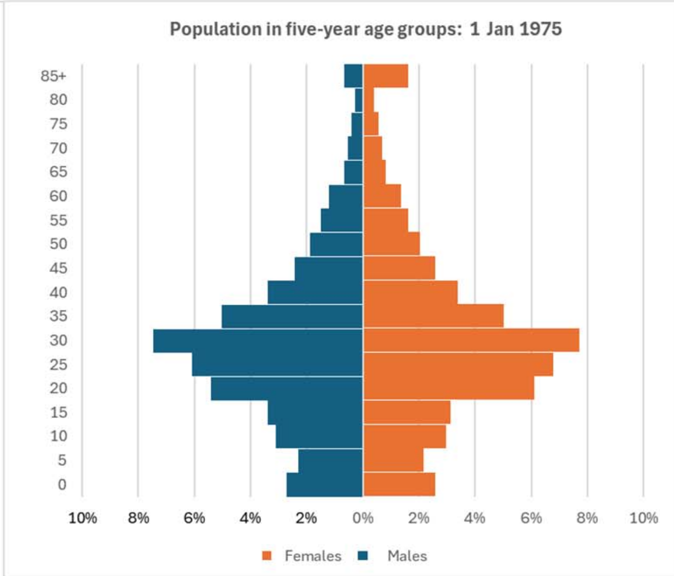


Population A





Population B



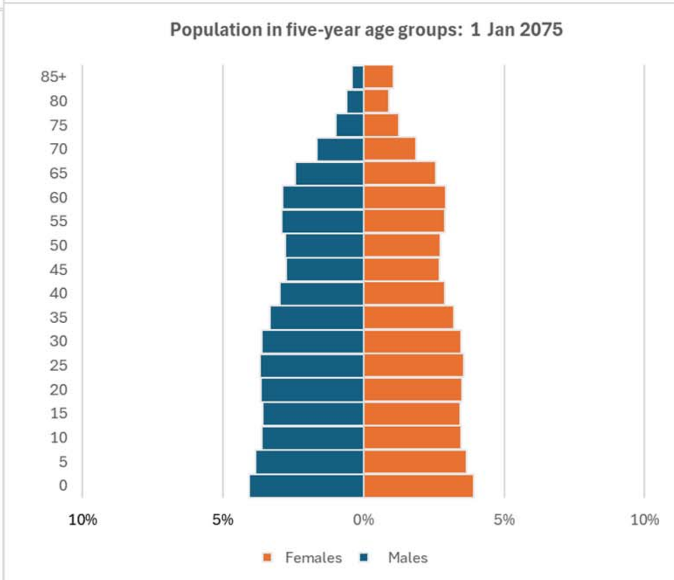
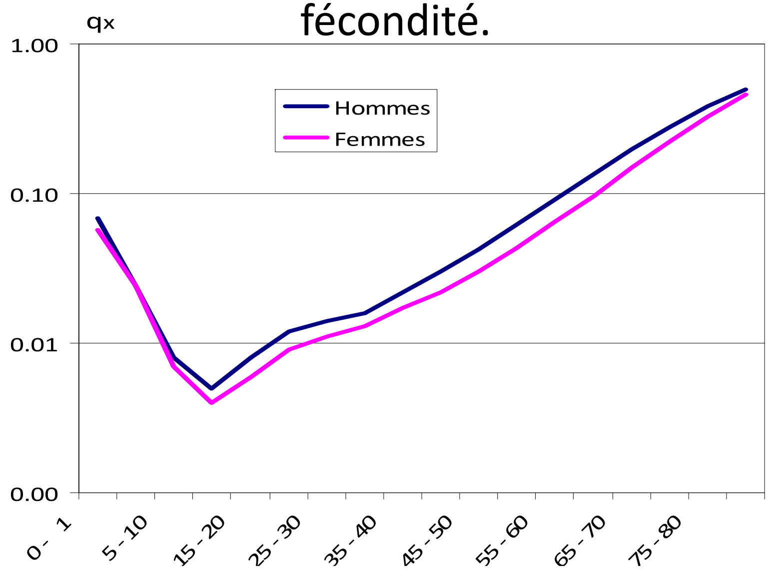
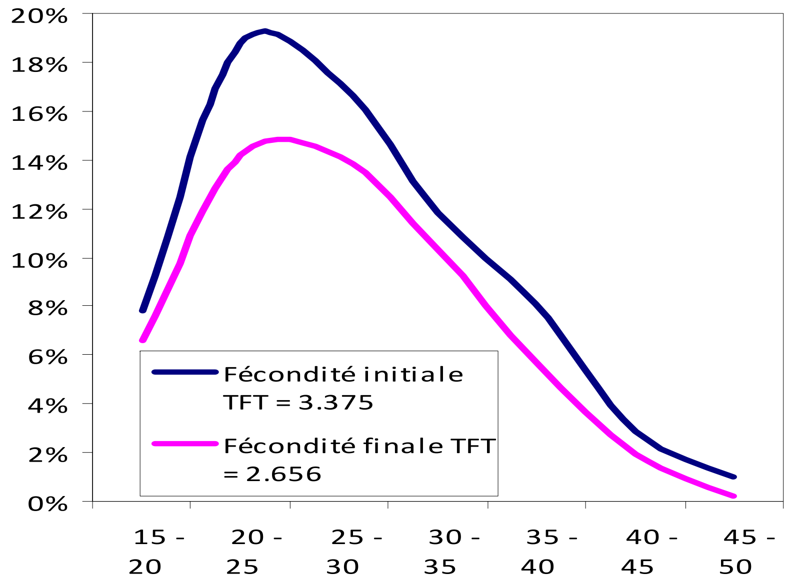


Illustration de la propriété ergodique des population stables

Hypothèses sur la mortalité et la fécondité.





Résultats de la projection sur 100 ans de deux populations avec les structures initiales différentes

Population stable équivalente: $e^{-r(x+0,5)} \times L_x$

Opérant des valeurs discrètes, on peut réécrire (7), (8) et (5) :

Taux de natalité dans la population stable : $$b = \frac{1}{\sum_{x=0,1...}^{\omega} e^{-r(x+0.5)} \cdot \frac{{}_1L_x}{S_0}} \qquad (7a)$$

Structure proportionnelle : $${}_1c_x = b \cdot e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{{}_1L_x}{S_0} \qquad (8a)$$

Equation intégrale : $$1 = \sum_{x=\alpha}^{\beta} e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{{}_1L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x^F \qquad (5a)$$

Exercice : réécrivez ces formules pour les groupes d'âge quinquennaux.

Soit *TNR* – taux net de reproduction ; on trouve le **taux intrinsèque d'accroissement naturel** par itérations à partir d'approximation suivante :

$$r_0 = \frac{\ln TNR}{AMM}$$

T=AMM âge moyen à la maternité dans la population stable

$$T = AMM = \frac{\sum_{x=0,1,...}^{\omega} (x+0,5) \cdot e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{{}_1L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x}{\sum_{x=0,1,...}^{\omega} e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{{}_1L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x}$$

Population stable équivalente (calculs) avec les groupes d'âges quinquennaux

Population féminine, les États-Unis, 1991 (source S.Preston et al., 2001, *Demography.* p.150)

âge	Population observée	Table de mortalité	Taux de fécondité	Calculs intermédiaires	Population stable équivalente
x	${}_5c_x$	${}_5L_x$	${}_5f_x$	exp(Z)†	${}_5c_x^S$
0	0.0726	495 804		4.9615	0.0624
5	0.0689	495 002		4.9603	0.0624
10	0.0667	494 603		4.9632	0.0625
15	0.0648	493 806	0.0007	4.9621	0.0624
20	0.0729	492 552	0.0303	4.9564	0.0624
25	0.0799	491 138	0.0566	4.9490	0.0623
30	0.0861	489 356	0.0578	4.9379	0.0621
35	0.0801	486 941	0.0388	4.9204	0.0619
40	0.0735	483 577	0.0157	4.8932	0.0616
45	0.0556	478 475	0.0027	4.8483	0.0610
50	0.0464	470 374	0.0001	4.7728	0.0601
55	0.0422	457 712		4.6508	0.0585
60	0.0436	438 502		4.4618	0.0562
65	0.0429	410 756		4.1852	0.0527
70	0.0365	371 990		3.7955	0.0478
75	0.0294	319 192		3.2613	0.0410
80	0.0203	249 203		2.5498	0.0321
85	0.0176	237 044		2.4287	0.0306
	1			79.4581	1.0000

***b*=** 0.012585

***d*=** 0.01286

1) Calculer ***r*** le taux intrinsèque d'accroissement (voir la diapositive 41) :

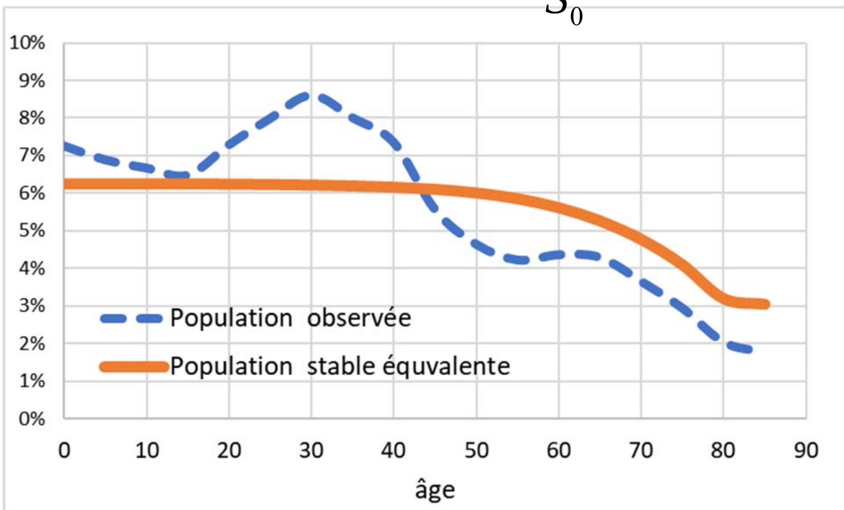
$$r = -0,00028$$

2) Calculer ***b*** le taux de natalité de la population stable :

$$b = \frac{1}{\sum_{x=0}^{80} e^{-r(x+2.5)} \cdot \frac{{}_5L_x}{S_0}} = \frac{1}{79,4581}$$

3) Calculer ${}_nc_x^S$ la structure par âge de la population stable équivalente :

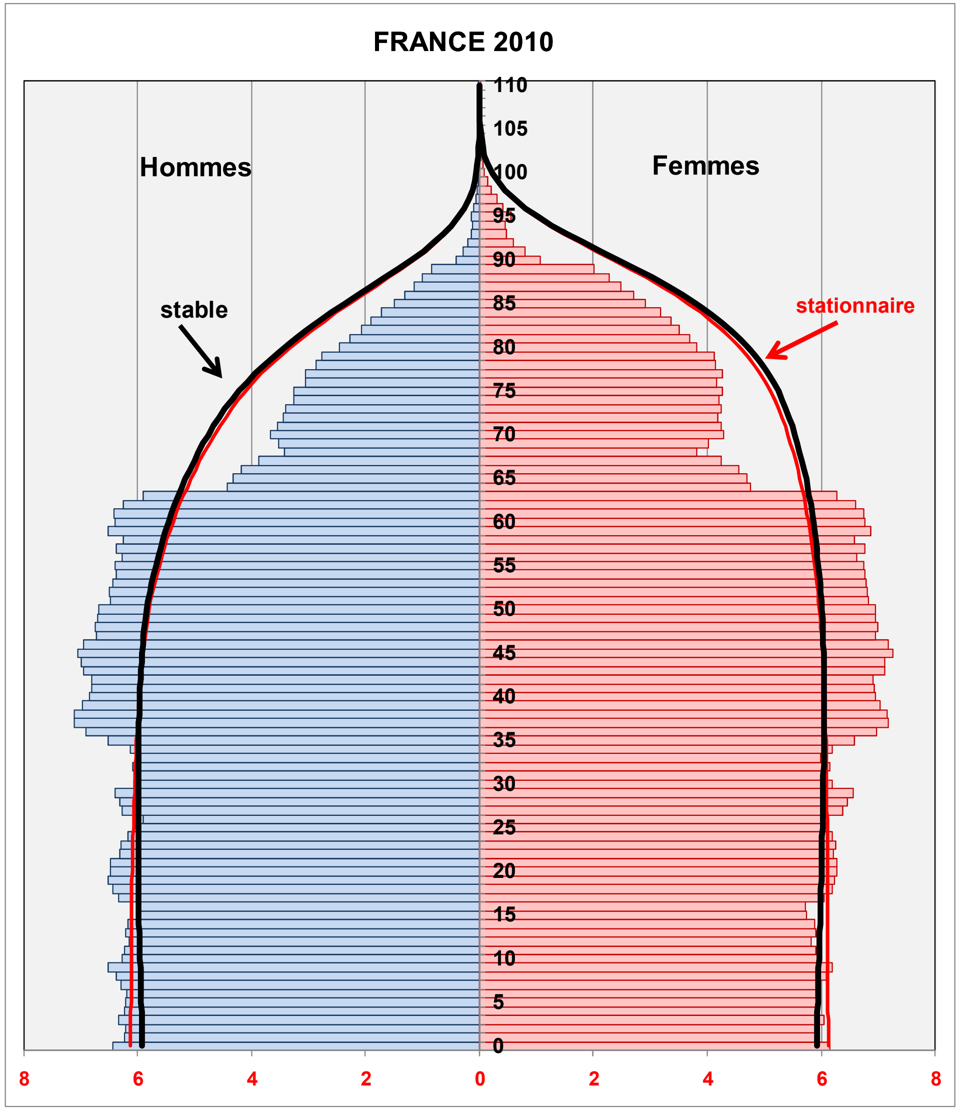
$${}_5c_x^S = b \cdot e^{-r\cdot(x+2,5)} \cdot \frac{{}_5L_x}{S_0}$$

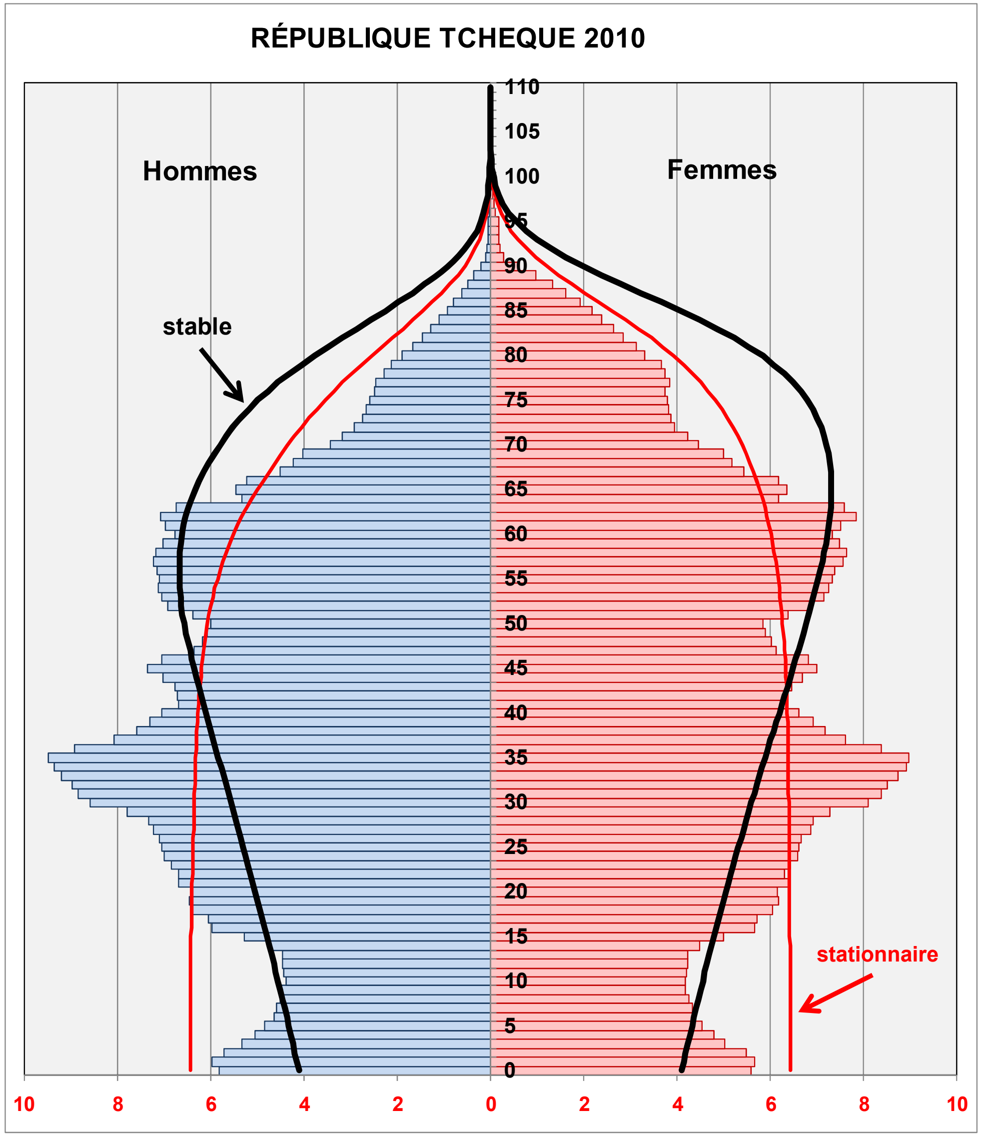


4) Calculer ***d*** le taux de mortalité de la population stable :

$$d = b - r$$

† - les calculs intermédiaires pour estimer taux de natalité : $\exp(Z) = e^{-r(x+2.5)} \cdot \frac{{}_5L_x}{S_0}$





Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	78,04	84,72
b=m	12,81	11,80
moyenne simple		12,31
moyenne pondérée		12,29

Population stable

r(Lotka)=	-0,00082
b=	0,01139
m=	0,01221
T=lnR0/r	30,032

Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	74,43	80,64
b=m	13,44	12,40
moyenne simple		12,92
moyenne pondérée		12,90

Population stable

r(Lotka)=	-0,01055
b=	0,00775
m=	0,01830
T=lnR0/r	29,728

Inertie de la population, potentiel de l'accroissement (population momentum)

Paul Vincent, « Potentiel d'accroissement d'une population » // Journal de la Société de Statistique de Paris, n°1-2, Janvier-Fevrier 1945, p.16-39

Nathan Keyfitz, « On the Momentum of Population Growth » // *Demography*, 1971, vol.8, no 1, p.71-80

Roland Pressat « Potentiel d'accroissement des populations », dans *Éléments de la démographie mathématiques*, Paris, édition de l'AIDELF, 1995, p 176-181

Samuel H. Preston and Michel Guillot, "Population dynamics in an age of declining fertility" // *Genus* , Vol. 65, (January-April 2009), pp. 83-98

Si une population réelle devient stationnaire, (i.e. $r_0 = 0$ et $R_o = 1$), sa croissance pourrait continuer jusqu'au moment de la stabilisation définitive de sa structure à cause de son inertie ou de son « potentiel de accroissement » accumulé dans sa structure par âge vers le moment de passage à la stationnarité. Ce potentiel (ou *momentum* démographique) peut être mesurer comme **le rapport entre l'effectif initial de la population et son effectif limite stationnaire.**

Les conditions implicites d'estimation de l'inertie d'une population

1. Que la population initiale soit « stable », i.e. qu'elle connaît la mortalité et la fécondité constantes (il n'y a que peu voire aucune population contemporaine qui a connu une telle expérience historique).
2. Que la population passe à la fécondité de simple remplacement des générations moyennant un changement proportionnel à tous les âges – inverse à ***TNR*** antérieur à la stationnarité (on a vu que le changement du niveau de la fécondité générale implique la transformation simultanée du niveau et de la forme de la distribution de fécondité par âge)

Par ailleurs, la description mathématique de l'inertie (du potentiel) est assez complexe et les facteurs de sa variation ne sont pas évidents.

Potentiel d'accroissement

Facteur par lequel une population serait multipliée à long terme, si la fécondité baissait aujourd'hui et restait durablement au niveau du remplacement des générations.

Fécondité et mortalité par âge correspondent à une population stationnaire. Pour autant, la population continuera à croître du fait que les jeunes générations déjà nées sont plus nombreuses que dans le cas stationnaire, puis oscillera avant de finalement se fixer à une certaine taille.

Cette inertie est déterminée par la structure par âge au moment du changement de la fécondité et au facteur d'agrandissement en résultant.

Le potentiel d'accroissement a été surtout utilisé pour apprécier l'effet d'une baisse de fécondité sur la taille d'une population d'un pays en voie de développement.

Le facteur multiplicatif v (sous la condition que la population initiale est une population stable) est obtenu par la formule : $v = \frac{n \cdot e_0}{\sqrt{R_0}}$ (proposée par James Frauenthal en 1975, note de AA)

avec n est taux de natalité; e_0 espérance de vie à la naissance; R_0 taux net de reproduction

Exemple: e_0=60; n=45 ‰; R_0=2.35; → $v = 0.045 \times \frac{60}{\sqrt{2.35}} = 0.045 \times 39.14 = 1.75$; ***v*=1.76**

Dans les pays développés, un facteur important d'accroissement résulte de la baisse de mortalité au-delà des âges fécondes.

Extrait de Nicolas Brouard « Potentiel de croissance » // *Dictionnaire de Démographie, Armand Colin 2011, p.380*

Estimation de l'inertie de la population (potentiel d'accroissement) *avec les notions en temps continu*

Soit N_s est le nombre de naissances vivantes sur une année de la durée moyenne de procréation dans une population dès le moment où **la stationnarité** correspondante à

$$N_s = \int_0^{\alpha} P(x) \cdot \frac{\int_a^{\beta} p(y) \cdot f^*(y)dy}{p(x) \cdot A^*} dx \quad (1)*$$

- $f^*(x)$ – une fonction de fécondité féminine nette (naissances des filles) ;
- $p(x)$ – une fonction de survie;
- A^* – âge moyen des mères dans la population stationnaire .

On peut simplifier l'écriture de la formule (1) en y introduisant l'expression : $w(x) = \frac{1}{A^*} \cdot \int_a^{\beta} p(y) \cdot f^*(y)dy$ (2)

qui exprime la part de la totalité des naissances vivantes chez les femmes à l'âge « x » au moment 0 (passage à la stationnarité) sur une année de vie dans l'attente d'une naissance (ce qui corresponde à l'âge moyen des mères). Par ailleurs, il est facile de démontrer que $\int_0^{\beta} w(x)dx = 1$

On peut donc réécrire la formule (1) comme suit : $N_s = \int_0^{\beta} \frac{P(x)}{p(x)} \cdot w(x)dx$ et sachant la durée de vie moyenne (***e°₀***) (3)

en déduire l'effectif final de la population stationnaire $P_s = N_s \cdot e_0^o = e_0^o \cdot \int_0^{\beta} \frac{P(x)}{p(x)} \cdot w(x)dx$ (4)

Par conséquent, on peut **mesurer l'inertie (potentiel d'accroissement) *M* qui est, par définition, un rapport entre l'effectif final de la population stationnaire et celui au moment de passage à la stationnarité** :

$$M = \frac{P_s}{P} = \int_0^{\beta} \frac{P(x)}{P} \cdot \frac{e_0^o}{p(x)} \cdot w(x)dx \rightarrow \; M = \int_0^{\beta} \frac{c(x)}{c_s(x)} \cdot w(x)dx$$

dépendant ainsi de trois distributions (c, c_s et w)sur l'intervalle entre 0 et 1 (5)

P population totale; $P(x)$ population (d'habitude féminine) par âge; $p(x)$ probabilité de survie entre la naissance et l'âge x

---

*) Une autre écriture de la formule 1 : $N_s = \frac{1}{A^*} \cdot \int_0^{a} P(x) \cdot \int_a^{\beta} \frac{p(y)}{p(x)} \cdot f^*(y)dydx$

Estimation de l'inertie d'une population (potentiel de l'accroissement) à la base des statistiques disponibles

Soit

$_5P_x^F$ - nombre des femmes âgées de x à x+n dans une population observée et $P^F = \sum_x {}_nP_x^F$

P^M - nombre des hommes dans une population observée

$_5L_x^F$ - nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge x, x+n selon la table de mortalité pour le sexe féminin

e_0^F et e_0^M - l'espérance de vie à la naissance des femmes et des hommes respectivement

$_5f_x^F$ - taux de fécondité féminine par âge observés; *(naissances vivantes des filles aux femmes à l'âge x divisées par l'effectif moyen des femmes à l'âge x)*

Alors on peut estimer

le taux net de reproduction = $TNR = \sum_{15}^{45} {}_5f_x^F \cdot {}_5L_x^F \longleftarrow$ fonction nette de reproduction féminine

les taux par âge de la fécondité correspondante au régime stationnaire = ${}_nf_x^{F\prime} = \dfrac{{}_nf_x^F}{TNR}$

c'était $\boldsymbol{f^*(x)}$ – fonction de densité de naissances des filles dans le temps continue

Amener le taux net de reproduction à valoir unité, et donc réaliser les conditions intrinsèques de stationnarité, **revient à substituer à f(x) la fonction $f^*(x) = f(x)/R_0$; R_0=TNR**

l'âge moyen des mères dans la population stationnaire *(ou la durée moyenne de la procréation)*

$$AMM^s = \sum_{x=15}^{45} (x+2.5) \cdot {}_nf_x^{Fs} \cdot {}_nL_x^F$$

l'âge moyen net à la fécondité

c'était ***A**** dans le temps continue;

Calculs du nombre de naissances féminines et de l'effectif de population stationnaire finale et le potentiel d'accroissement

Il faut maintenant estimer le nombre de naissances produites par les femmes, qui avait l'âge x < β (β – âge limite de fécondité)

Soit $${}_n w_x = \frac{0.5 \cdot {}_n L_x^F \cdot {}_n f_x^{Fs} + \sum_{y=x+5}^{45} {}_n L_y^F \cdot {}_n f_y^{Fs}}{AMM^s}$$

une part de naissances dans l'état stationnaire réduites à une année de l'âge moyen des mères,
(chez les femmes âgées de x à x+n au moment de passage au régime stationnaire)

pour les âges < 15 ans ${}_n w_x$ = 1/AMM
pour les âges > 15 ans ${}_n w_x$ = (1/AMM)*(K1+K2) où

$K1 = 0{,}5 \cdot {}_n L_a \cdot {}_n f_a^{Fs}$ les naissances à l'âge « a » au moment zéro

$K2 = \sum_{y=a+5}^{\beta} {}_n L_y \cdot {}_n f_y^{Fs}$ les naissances après l'âge a+5

Alors $$N_s^F = 5 \cdot \sum_{x=0}^{45} \frac{{}_5 P_x^F}{{}_5 L_x^F} \cdot {}_5 w_x^F$$ **- le nombre de naissances féminines dans la population stationnaire**

Plus exactement il faudrait écrire : $N_s^F = \sum_{x=0}^{45} \frac{{}_5 P_x^F}{({}_5 L_x^F / 5)} \cdot {}_5 w_x^F$ puisque ${}_5L_x$ /5 sert un estimateur de la fonction de survie (voir formule 3 sur la diapositive 51)

$$P_s^F = N_s^F \cdot e_0^F$$ - le nombre des femmes dans la population stationnaire

$$P_s^M = N_s^F \cdot RSN \cdot e_0^H$$ - le nombre des hommes dans la population stationnaire (RSN –rapport des sexes à la naissances)

Potentiel d'accroissement : $$M = \frac{P_S^F + P_S^H}{P^F + P^H}$$

Calculs pratiques : groupes d'âges quinquennaux

Soit $l_0 = 1$

1) l'âge moyen net à la fécondité : $\longrightarrow$ $A^* = \sum_{x=15}^{45} (x+2.5) \cdot {}_5 f_x^F \cdot {}_5 L_x^F$

2) le nombre de naissances féminines dans la population stationnaire :

$$N_s^F = \frac{1}{A^*} \cdot \sum_{x=0}^{45} \frac{{}_5 P_x^F \cdot \left(\frac{{}_5 L_x^F}{2} \cdot {}_5 f_x^F + \sum_{y=x+5}^{45} {}_5 L_y^F \cdot {}_5 f_y^F \right)}{\frac{{}_5 L_x^F}{5}}$$

3) le nombre des femmes dans la population stationnaire : $\longrightarrow$ $P_s^F = N_s^F \cdot e_0^F$

4) le nombre des hommes dans la population stationnaire : $\longrightarrow$ $P_s^M = N_s^F \cdot 1.05 \cdot e_0^H$

5) le potentiel d'accroissement : $\longrightarrow$ $\boxed{M = \frac{P_S^F + P_S^H}{P^F + P^H}}$

Samuel H. Preston, Michel Guillot: Population dynamics in age of declining fertility. *Genus, LXV, p.83-98*

Exemple numérique de calcul du potentiel d'accroissement*

Age central a	P_a^F	f_a	${}_nL_a^F$	$f_a * L_a^F$	croissance 0 f_a^*	Calculs $a \cdot f_a^* \cdot {}_nL_a^F$	cumul f_a^* du bas vers haut	poids w_a	$B_a^S = P_a^F / L_a^F \cdot w_a$ stationnaires	B_a
1	2	3	4	5 = 4 x 3	6 = 5/Σ(5)	7 = 1 x 4 x 6		9	2/4 x 9	2 x 3
2.5	12 013	0.0000	4.834	0.000	0.000	0.000	1.000	0.187967	467	0
7.5	11 027	0.0000	4.803	0.000	0.000	0.000	1.000	0.187967	432	0
12.5	9 856	0.0000	4.789	0.000	0.000	0.000	1.000	0.187967	387	0
17.5	8 614	0.0430	4.773	0.205	0.121	2.109	0.879	0.176639	319	370
22.5	7 694	0.1120	4.748	0.532	0.312	7.027	0.567	0.135961	220	862
27.5	6 893	0.1120	4.716	0.528	0.310	8.530	0.257	0.077459	113	772
32.5	6 135	0.0580	4.678	0.271	0.159	5.178	0.098	0.033331	44	356
37.5	5 318	0.0290	4.631	0.134	0.079	2.958	0.019	0.010944	13	154
42.5	4 376	0.0070	4.570	0.032	0.019	0.798	0.000	0.001766	2	31
47.5	3 510	0.0000	4.483	0.000	0.000	0.000		0.000000	0	0
		1.8050		**1.703**	**1.000**	**26.60**		**1.000000**	**1 996**	**2545**
		ISF		**TNR**	**TNR_0**	**AMM**			Naissances	

* Sf. Samuel H. Preston and Michel Guillot, "Population dynamics in an age of declining fertility" // Genus , Vol. 65, (January-April 2009), pp. 83-98

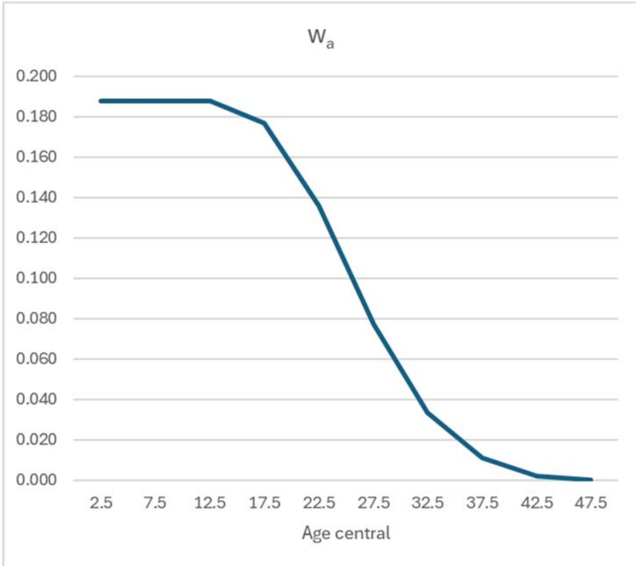
Calculs :

Nombre de femmes $(PF) = 87\,176\,;\ e_0 = 70.3$

$$TBN := \boldsymbol{b = 0.0292} = \frac{\sum B_a}{P^F} = \frac{2545}{87176}\ ;\ \boldsymbol{R_0} = \sqrt[AMM]{TNR} - 1 = 1.709^{\frac{1}{26.6}} - 1 = \boldsymbol{0.0202}$$

Nombre de femmes $\left(\boldsymbol{P_S^F} = e_0 \cdot \sum B_a^s\right) = 2545 * 70.3 = \boldsymbol{140305}$

Potentiel de croissance $\boldsymbol{M} = P_S^F / P^F = \frac{140305}{87176} = \boldsymbol{1.6094}$



Autres approches :

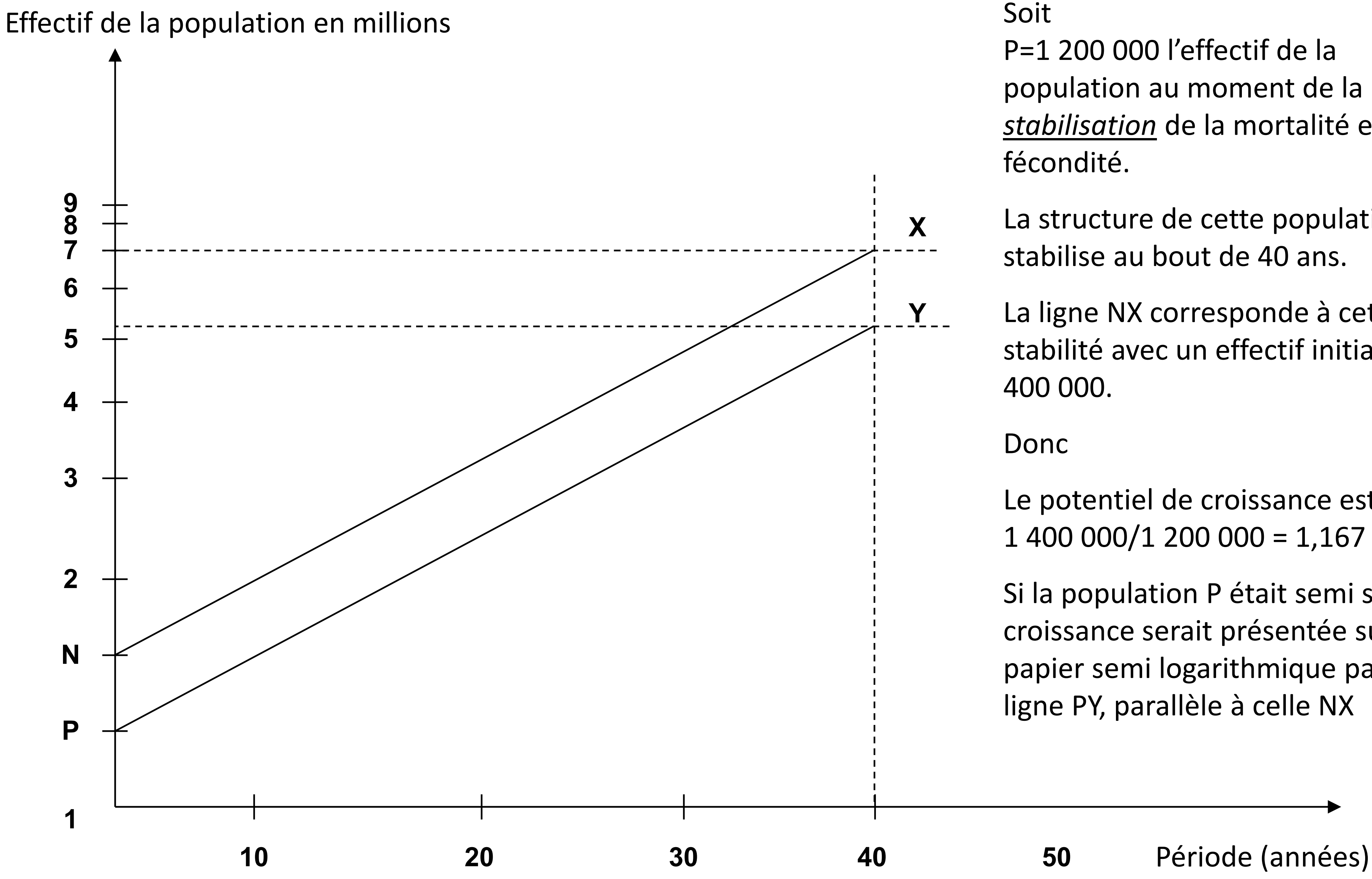
Nathan Keyfitz 1971 → $\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{b \cdot e_0}}{\boldsymbol{R_0}} \cdot \frac{\boldsymbol{TNR - 1}}{\boldsymbol{TNR}} = \frac{0.0292 \cdot 70.3}{0.0202} \cdot \frac{1.703 - 1}{1.703} = 1.575$

James Frauenthal 1975 → $\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{b \cdot e_0}}{\sqrt{\boldsymbol{TNR}}} = \frac{0.0292 \cdot 70.3}{\sqrt{1.703}} = 1.573$

Joshua R. Goldstein 2002 → $\boldsymbol{M = b \cdot e_0 \cdot R_0^{(m-0.5)}}$ où $\boldsymbol{m}$ – paramétré de la transition :

$\boldsymbol{m = 0}$ – transition immédiate $\quad M = 0.0292 \cdot 70.3 \cdot 0.0202^{-0.5} = 1.573$
$\boldsymbol{m = 1}$ – transition lente $\quad M = 0.0292 \cdot 70.3 \cdot 0.0202^{0.5} = 2.678$
$\boldsymbol{m = 0.5}$ – transition rapide $\quad M = 0.0292 \cdot 70.3 \cdot 0.0202^{0} = 2.052$

Présentation graphique du potentiel d'accroissement accumulé dans la structure par âge (l'inertie de la population)



Soit
P=1 200 000 l'effectif de la population au moment de la *stabilisation* de la mortalité et de la fécondité.

La structure de cette population se stabilise au bout de 40 ans.

La ligne NX correspond à cet état de stabilité avec un effectif initial de 1 400 000.

Donc

Le potentiel de croissance est égal à 1 400 000/1 200 000 = 1,167

Si la population P était semi stable sa croissance serait présentée sur le papier semi logarithmique par la ligne PY, parallèle à celle NX

Potentiel d'accroissement **France 2010**

Population momentum

x	P_x^F	L_x^F	f_x^F	$f_x^F \cdot L_x^F$	f_x^{F*}	$f_x^{F*}.L_x^F$	$(x+0,5).f_x^{F*}.L_x^F$	cumul $f_x^{F*}L_x^F$ de base	$f_x^{F*}.L_x^F$ *0,5	w_x	N_S^F $(P_x/(L_x^F).w_x$
0	385 898	0.99704						1.00000	0.0000	0.03331	12 893
1	374 975	0.99669						1.00000	0.0000	0.03331	12 532
2	373 261	0.99646						1.00000	0.0000	0.03331	12 478
3	380 265	0.99633						1.00000	0.0000	0.03331	12 714
4	374 115	0.99624						1.00000	0.0000	0.03331	12 509
5	371 908	0.99617						1.00000	0.0000	0.03331	12 436
6	373 203	0.99611						1.00000	0.0000	0.03331	12 480
7	375 064	0.99603						1.00000	0.0000	0.03331	12 544
8	382 386	0.99594						1.00000	0.0000	0.03331	12 790
9	388 433	0.99587						1.00000	0.0000	0.03331	12 993
10	374 381	0.99580						1.00000	0.0000	0.03331	12 524
11	371 459	0.99573						1.00000	0.0000	0.03331	12 427
12	365 244	0.99565	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005	1.00000	0.0000	0.03331	12 220
13	370 662	0.99556	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00037	0.99997	0.0000	0.03331	12 402
14	369 092	0.99546	0.00013	0.00013	0.00013	0.00013	0.00187	0.99984	0.0001	0.03331	12 350
15	359 953	0.99535	0.00051	0.00050	0.00052	0.00052	0.00800	0.99932	0.0003	0.03330	12 042
50	436 210	0.97186	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00260	0.00008	0.0000	0.00000	2
51	428 758	0.96944	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00168	0.00005	0.0000	0.00000	1
52	427 107	0.96691	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00143	0.00002	0.0000	0.00000	1
53	426 655	0.96428	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00055	0.00001	0.0000	0.00000	0
54	424 412	0.96137	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00056		0.0000	0.00000	0
Total			**0.98406**	**0.97582**	1.00845	**1.00000**	**30.01977** **A***			1.00000	**383 551**

P_F= 32 379 225 **e_0^F= 84.72** **N_F= 392 084**

P_M= 30 409 593 **e_0^M= 78.04** **N_M= 410 140**

NRR= 0.976 **A*= 30.02** **TBN= 0.012109** pour les femmes

N_S^F= 383 551 **TBN= 0.013487** pour les hommes

P_S^F= 32 494 469 **r= -0.00082**

P_S^M= 31 310 771

M= 1.016

Le potentiel d'accroissement démographique (*population momentum*)

Deux facteurs de croissance de la population mondiale :

1. Le régime démographique avec le remplacement élargi des générations (la génération des filles est plus nombreuse que la génération des mères : on dit « le taux net de reproduction > 1 ») ;
2. L'effet de la structure par âge des populations, désigné comme « ***population momentum*** » en anglais (on pourrait dire « le moment de croissance démographique » ou « le moment de population »)
   = croissance (ou décroissance) provenant de l'inertie de la structure de la population.

On mesure le moment de croissance comme un rapport entre les effectifs initiaux d'une population au moment de stabilisation et d'une population stable correspondante la l'état finale de cette première population .

Source : Preston S.H., M. Guillot (1997) « Population dynamic in an Age of Declining Fertility" *Genus*, vol.53, n°3-4, p.15-31

Valeurs estimées du « population momentum » pour les régions et quelques pays du monde

Région ou pays	Population momentum
Afrique	1,56
Asie de l'Est	1,22
Asie Sud-centrale	1,47
Asie Sud-est	1,48
Asie de l'Ouest	1,56
Europe	0,98
Amérique Latine	1,48
Amérique du Nord	1,10
Australie	0,96
Russie	0,94
Italie	0,91
Allemagne	0,88
Population mondiale	***1,35***

Matériaux et illustrations supplémentaires

Espérance de vie à la naissance

Indice synthétique de fécondité

Taux d'accroissement d'une population stable (r)

Les isolignes de r

Localisation des populations humaines

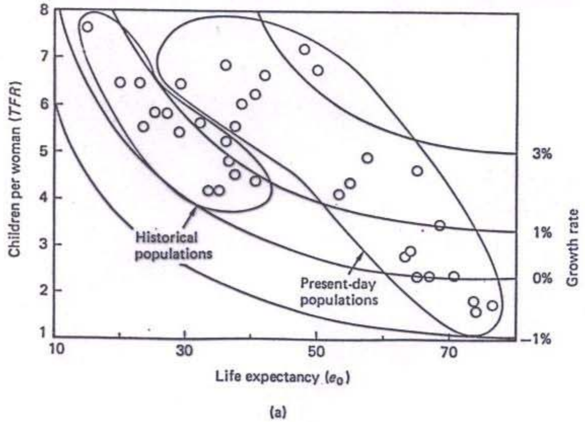


Figure 1.8a Relation between the average number of children per woman (*TFR*) and life expectancy (e_0) in historical and present-day populations

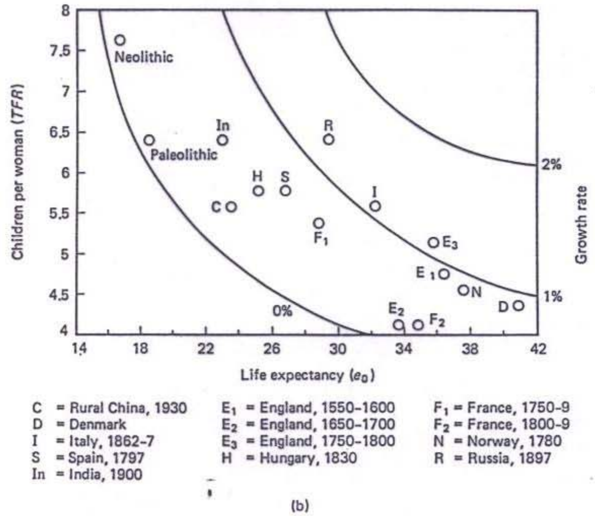
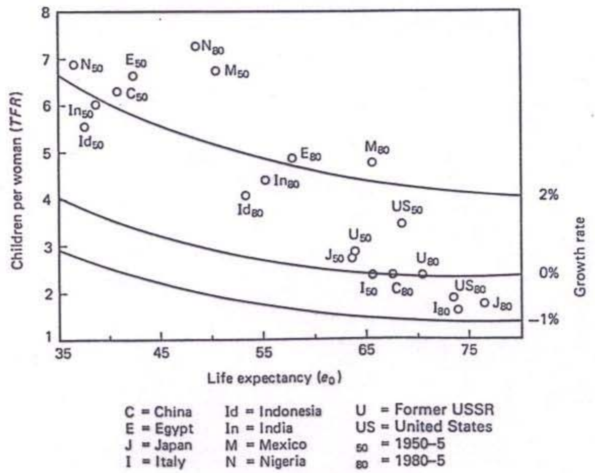


Figure 1.8b Relation between *TFR* and e_0 in historical populations



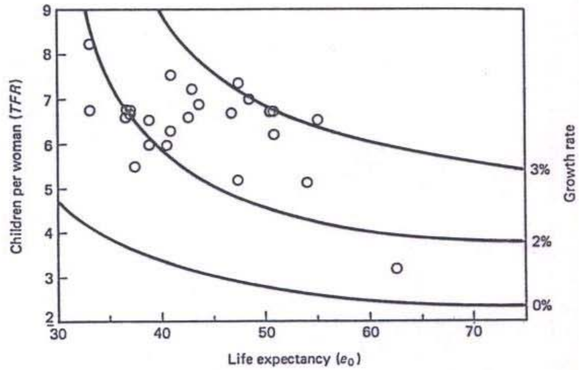


Figure 5.2 Relation between life expectancy (e_0) and average number of children per woman (*TFR*) for 25 large less-developed countries (1950–5)

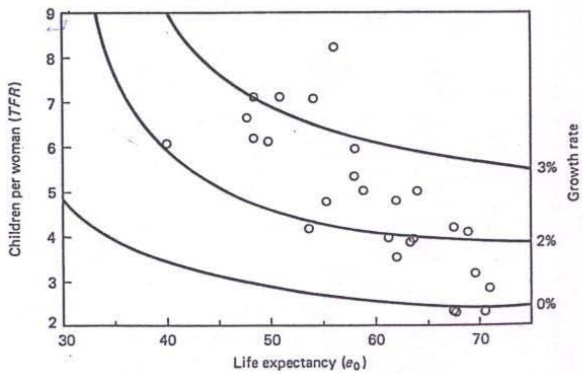
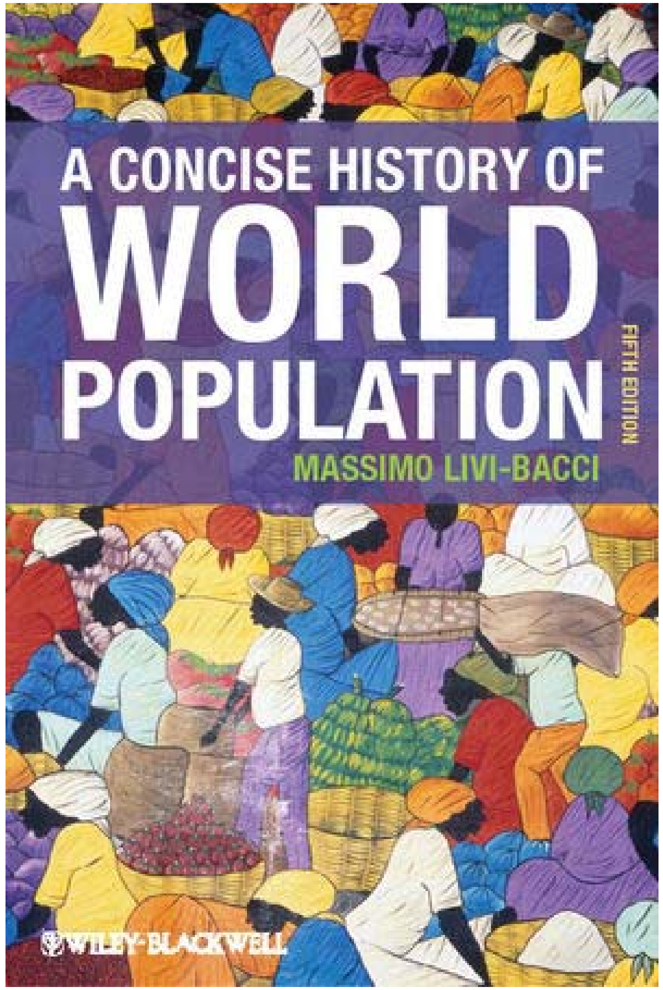


Figure 5.3 Relation between life expectancy (e_0) and average number of children per woman (*TFR*) for 25 large less-developed countries (1980–5)



http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg_id=0&ref_id=ir-sd20101

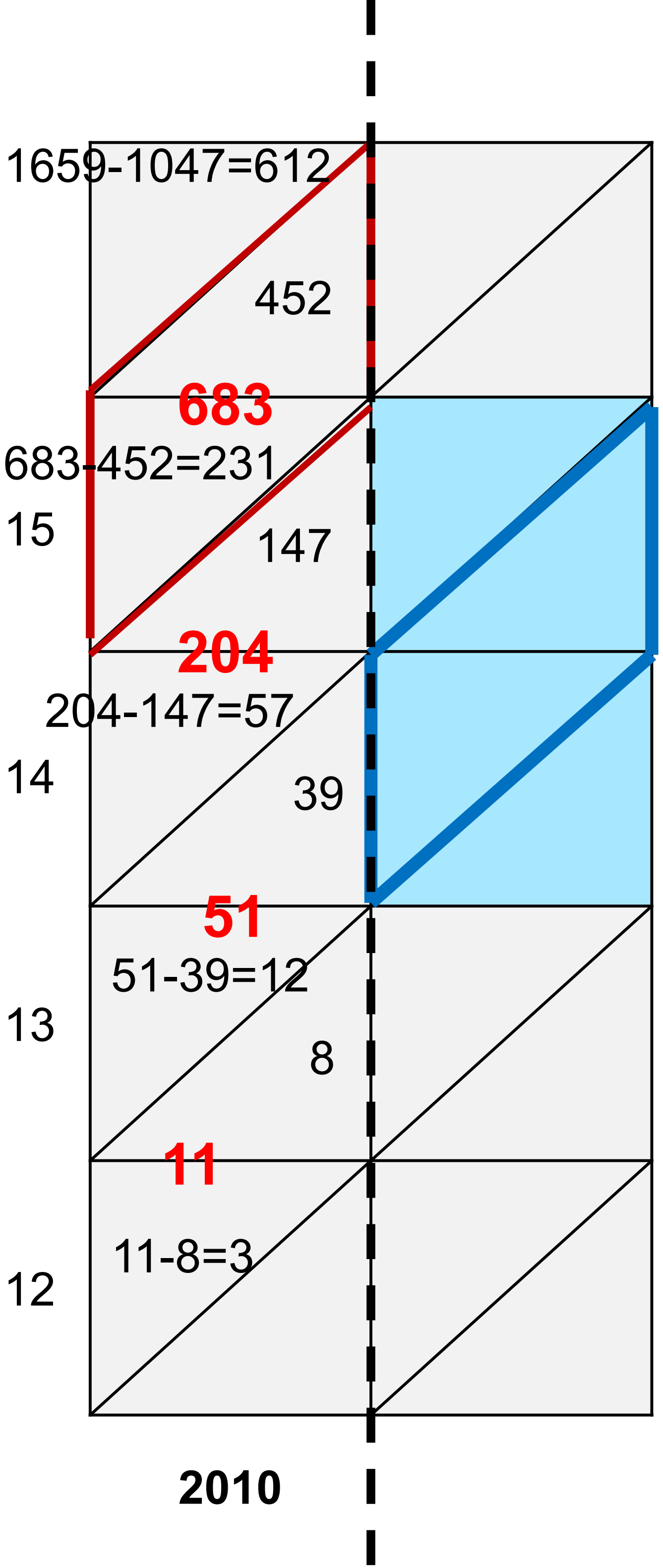


TABLEAU 49 - NÉS VIVANTSELON L'ANNÉE DE NAISSANCE DE LA MÈRE

Année 2010

France métropolitaine 2010

Année de naissance de la mère	Enfants nés vivants					
	Ensemble		Nés dans le mariage		Nés hors mariage	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1997	11	8	2	1	9	7
1996	51	39	0	0	51	39
1995	204	147	5	4	199	143
1994	683	452	3	1	680	451
1993	1 659	1 047	27	21	1 632	1 026
1992	3 617	2 163	129	95	3 488	2 068

a. Total
b. Dont après anniversaire de la mère

$$\bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^{T}\ln(P_t)}{T}\right)$$

Population moyenne

$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t}$$

Nés vivants	Total	Garçons	Filles
2010	802 224	410 140	392 084

Proportion des filles: 392084/802224=0,488746

Naissances vivantes:

12 ans révolus: 0+3=3
14 ans révolus: 39+57=96

France métropolitaine 2010

a_x âge révolu	Naissances vivantes toutes	filles	Population 1.1.2010 femmes	1.1.2011 femmes	Population moyenne femmes	f_x	f_x(filles)	L_x(femmes)	R_0 $S_0=l_0=1$ L_x(femmes)* f_x(filles)	R_1 $(a_x+0,5)$* L_x(femmes)* f_x(filles)	R_2 $(a_x+0,5)$^2* L_x(femmes)* f_x(filles)	$S_0=l_0=1$ $(a_x+0,5)$* L_x(femmes)* e^{-rx}*f_x(filles)	$S_0=l_0=1$ L_x(femmes)* e^{-rx}*f_x(filles)
12	3	1	365 244	372 496	368 852	0,00001	0,00000	99 565	0,00000	0,00005	0,00062	0,000050	0,000004
13	20	10	370 662	366 277	368 463	0,00005	0,00003	99 556	0,00003	0,00036	0,00481	0,000360	0,000027
14	96	47	369 092	371 648	370 368	0,00026	0,00013	99 546	0,00013	0,00183	0,02651	0,001850	0,000128
15	378	185	359 953	370 278	365 079	0,00104	0,00051	99 535	0,00050	0,00781	0,12101	0,007906	0,000510
16	1 064	520	359 411	361 291	360 350	0,00295	0,00144	99 521	0,00144	0,02370	0,39101	0,024018	0,001456
17	2 501	1 222	379 968	360 400	370 055	0,00676	0,00330	99 507	0,00329	0,05752	1,00661	0,058347	0,003334
18	5 092	2 489	388 423	380 910	384 648	0,01324	0,00647	99 490	0,00644	0,11909	2,20308	0,120895	0,006535
19	9 404	4 596	391 845	389 182	390 511	0,02408	0,01177	99 468	0,01171	0,22829	4,45159	0,231945	0,011895
20	13 477	6 587	394 628	392 251	393 438	0,03425	0,01674	99 446	0,01665	0,34130	6,99674	0,347056	0,016930
21	18 014	8 804	394 091	395 165	394 628	0,04565	0,02231	99 423	0,02218	0,47690	10,25345	0,485337	0,022574
22	22 947	11 215	390 209	394 756	392 476	0,05847	0,02858	99 400	0,02840	0,63909	14,37963	0,650925	0,028930
23	28 976	14 162	392 762	391 121	391 941	0,07393	0,03613	99 377	0,03591	0,84383	19,83002	0,860152	0,036602
24	35 038	17 125	388 843	394 075	391 450	0,08951	0,04375	99 353	0,04346	1,06486	26,08912	1,086344	0,044341
25	41 845	20 452	383 213	390 233	386 707	0,10821	0,05289	99 326	0,05253	1,33952	34,15767	1,367653	0,053633
26	46 939	22 941	375 804	384 715	380 233	0,12345	0,06033	99 300	0,05991	1,58768	42,07344	1,622349	0,061221
27	53 722	26 256	400 292	377 466	388 711	0,13821	0,06755	99 272	0,06706	1,84403	50,71080	1,885835	0,068576
28	59 582	29 120	406 062	402 373	404 213	0,14740	0,07204	99 239	0,07149	2,03758	58,07110	2,085476	0,073175
29	62 179	30 390	411 478	408 559	410 016	0,15165	0,07412	99 206	0,07353	2,16913	63,98946	2,221931	0,075320
30	60 295	29 469	389 099	413 974	401 344	0,15023	0,07343	99 175	0,07282	2,22101	67,74076	2,276923	0,074653
31	54 703	26 736	381 120	391 463	386 257	0,14162	0,06922	99 144	0,06863	2,16170	68,09354	2,217929	0,070410
32	50 193	24 532	386 706	382 898	384 797	0,13044	0,06375	99 111	0,06319	2,05352	66,73954	2,108658	0,064882
33	44 234	21 619	376 032	388 022	381 980	0,11580	0,05660	99 072	0,05607	1,87843	62,92738	1,930435	0,057625
34	38 112	18 627	388 685	377 137	382 867	0,09954	0,04865	99 030	0,04818	1,66220	57,34581	1,709610	0,049554
35	34 780	16 999	413 115	389 633	401 202	0,08669	0,04237	98 985	0,04194	1,48884	52,85375	1,532554	0,043171
36	30 028	14 676	437 813	413 843	425 659	0,07054	0,03448	98 933	0,03411	1,24504	45,44380	1,282638	0,035141
37	25 060	12 248	450 545	438 521	444 492	0,05638	0,02755	98 873	0,02724	1,02167	38,31250	1,053381	0,028090
38	19 868	9 710	449 928	451 032	450 480	0,04410	0,02156	98 806	0,02130	0,81999	31,56946	0,846130	0,021977
39	15 280	7 468	442 146	450 393	446 250	0,03424	0,01674	98 734	0,01652	0,65267	25,78037	0,674026	0,017064
40	10 848	5 302	436 471	442 445	439 448	0,02469	0,01206	98 655	0,01190	0,48206	19,52338	0,498240	0,012302
41	7 162	3 500	435 257	436 626	435 941	0,01643	0,00803	98 564	0,00791	0,32844	13,63028	0,339742	0,008187
42	4 569	2 233	434 280	435 207	434 743	0,01051	0,00514	98 460	0,00506	0,21494	9,13502	0,222519	0,005236
43	2 729	1 334	446 317	434 145	440 189	0,00620	0,00303	98 353	0,00298	0,12964	5,63915	0,134315	0,003088
44	1 464	716	447 362	446 038	446 700	0,00328	0,00160	98 233	0,00157	0,07002	3,11592	0,072607	0,001632
45	772	377	455 358	446 885	451 102	0,00171	0,00084	98 099	0,00082	0,03733	1,69869	0,038745	0,000852
46	397	194	450 562	454 835	452 693	0,00088	0,00043	97 951	0,00042	0,01952	0,90779	0,020277	0,000436
47	185	90	436 770	449 881	443 277	0,00042	0,00020	97 786	0,00020	0,00947	0,45003	0,009848	0,000207
48	88	43	438 503	436 037	437 268	0,00020	0,00010	97 605	0,00010	0,00466	0,22583	0,004844	0,000100
49	63	31	436 073	437 726	436 899	0,00014	0,00007	97 404	0,00007	0,00340	0,16820	0,003538	0,000071
50	46	22	436 210	435 236	435 723	0,00011	0,00005	97 186	0,00005	0,00253	0,12788	0,002639	0,000052
51	29	14	428 758	435 140	431 937	0,00007	0,00003	96 944	0,00003	0,00164	0,08437	0,001709	0,000033
52	24	12	427 107	427 669	427 388	0,00006	0,00003	96 691	0,00003	0,00139	0,07314	0,001454	0,000028
53	9	4	426 655	426 053	426 354	0,00002	0,00001	96 428	0,00001	0,00053	0,02848	0,000556	0,000010
54	9	4	424 412	425 527	424 969	0,00002	0,00001	96 137	0,00001	0,00054	0,02956	0,000567	0,000010
Total	***802 224***	***392 084***	***17 597 264***	***17 569 562***	***17 582 099***	***2,01343***	***0,98406***		***0,97582***	*29,29374*	*906,40131*	*30,04231*	*1,00000*
										30,01977	***928,86587***	***30,042***	
Total	Garçons	Filles	Proportion filles				***taux brut de reproduction***		***taux net de reproduction*** R_0	***âge moyen net à la maternité*** α		***âge moyen à la maternité de la population stable***	
802 224	410 140	392 084	0,48875										

France métropolitaine 2010

r(Lotka)=	-0,00082		b=	0,01139
			m=	0,01221
α=R1/R0	30,019767			
β=α^2-R2/R0	-27,67945		T=lnR_0/r	30,032
r(Kuczynski)=	-0,00082		T=alfa + 0,5*beta*r	30,031

T étant l'intervalle entre générations successives et correspond à l'âge moyen à la maternité dans la population stable

r = b - m

r taux intrinsèque d'accroissement naturel

b taux de natalité d'une population stable
m taux de mortalité d'une population stable

Population stable équivalente par âge: $L_x * e^{-r(x+0.5)}$

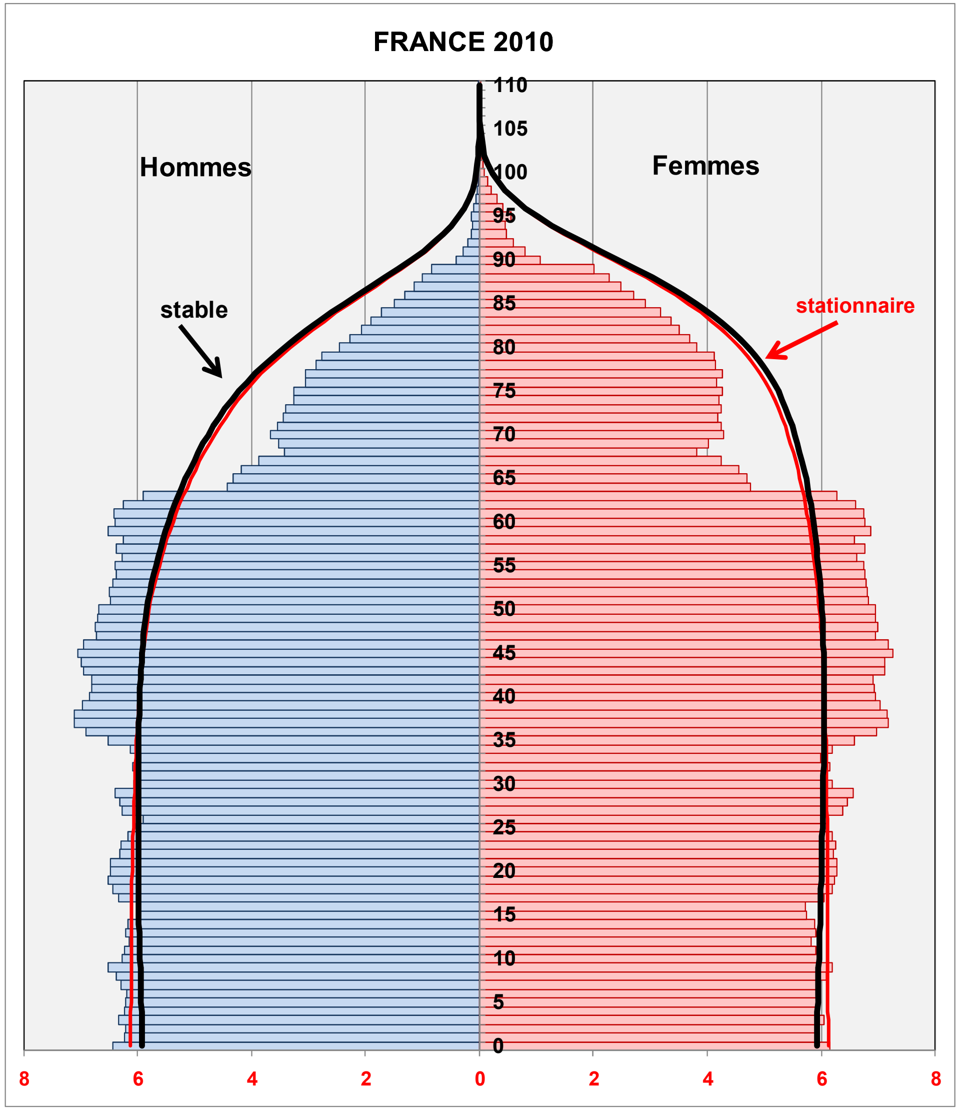
France métropolitaine 2010

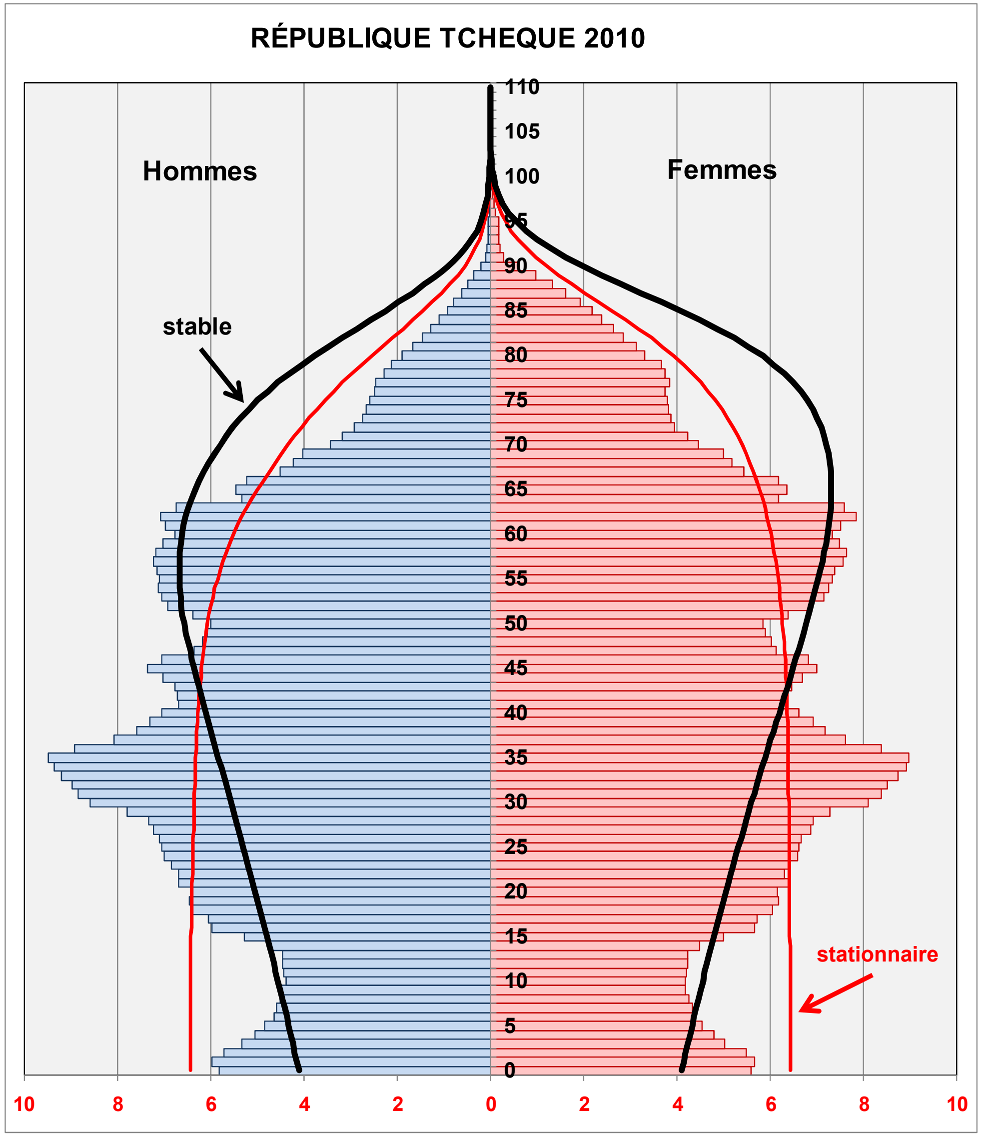
Chiffres absolus

	Réelle		Stationnaire		Stable	
	Hommes	***Femmes***	***Hommes***	***Femmes***	***Hommes***	***Femmes***
0	403 659	385 898	99 639	99 704	99 680	99 745
1	391 549	374 975	99 605	99 669	99 727	99 791
2	389 755	373 261	99 582	99 646	99 785	99 849
3	398 106	380 265	99 564	99 633	99 848	99 918
4	390 797	374 115	99 552	99 624	99 918	99 990
5	389 641	371 908	99 541	99 617	99 988	100 065
6	388 965	373 203	99 528	99 611	100 057	100 140
7	394 692	375 064	99 518	99 603	100 128	100 214
8	399 840	382 386	99 510	99 594	100 202	100 287
9	409 343	388 433	99 502	99 587	100 276	100 361
10	393 179	374 381	99 493	99 580	100 348	100 436
11	390 584	371 459	99 483	99 573	100 420	100 511
12	386 213	365 244	99 472	99 565	100 491	100 585
13	389 921	370 662	99 462	99 556	100 563	100 658
14	387 050	369 092	99 451	99 546	100 634	100 730
15	376 876	359 953	99 430	99 535	100 694	100 801
16	376 776	359 411	99 397	99 521	100 743	100 869
17	398 157	379 968	99 358	99 507	100 786	100 937
18	404 074	388 423	99 313	99 490	100 822	101 002
19	409 412	391 845	99 255	99 468	100 845	101 062
20	406 307	394 628	99 190	99 446	100 862	101 122
105	40	395	52	294	57	320
106	19	220	27	159	29	173
107	9	112	13	83	14	91
108	3	55	6	42	7	46
109	1	24	3	20	3	22
110	0	16	2	17	2	19
	30 409 593	32 379 225	7 804 081	8 471 925	8 068 142	8 779 484

Chiffres relatifs

	Réelle		Stationnaire		Stable	
	Hommes	***Femmes***	***Hommes***	***Femmes***	***Hommes***	***Femmes***
0	6,429	6,146	6,122	6,126	5,917	5,920
1	6,236	5,972	6,120	6,124	5,919	5,923
2	6,207	5,945	6,118	6,122	5,923	5,927
3	6,340	6,056	6,117	6,121	5,927	5,931
4	6,224	5,958	6,116	6,121	5,931	5,935
5	6,206	5,923	6,116	6,120	5,935	5,939
6	6,195	5,944	6,115	6,120	5,939	5,944
7	6,286	5,973	6,114	6,120	5,943	5,948
8	6,368	6,090	6,114	6,119	5,948	5,953
9	6,519	6,186	6,113	6,119	5,952	5,957
10	6,262	5,963	6,113	6,118	5,956	5,961
11	6,221	5,916	6,112	6,118	5,960	5,966
12	6,151	5,817	6,112	6,117	5,965	5,970
13	6,210	5,903	6,111	6,117	5,969	5,975
14	6,164	5,878	6,110	6,116	5,973	5,979
15	6,002	5,733	6,109	6,115	5,977	5,983
16	6,001	5,724	6,107	6,115	5,980	5,987
17	6,341	6,052	6,105	6,114	5,982	5,991
18	6,435	6,186	6,102	6,113	5,984	5,995
19	6,520	6,241	6,098	6,111	5,986	5,999
20	6,471	6,285	6,094	6,110	5,987	6,002
105	0,001	0,006	0,003	0,018	0,003	0,019
106	0,000	0,004	0,002	0,010	0,002	0,010
107	0,000	0,002	0,001	0,005	0,001	0,005
108	0,000	0,001	0,000	0,003	0,000	0,003
109	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001
110	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001
	484	516	479	521	479	521
		1000,000		1000,000		1000,000





Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	78,04	84,72
b=m	12,81	11,80
moyenne simple		12,31
moyenne pondérée		12,29

Population stable

r(Lotka)=	-0,00082
b=	0,01139
m=	0,01221
T=lnR0/r	30,032

Population stationnaire

	Hommes	Femmes
e0	74,43	80,64
b=m	13,44	12,40
moyenne simple		12,92
moyenne pondérée		12,90

Population stable

r(Lotka)=	-0,01055
b=	0,00775
m=	0,01830
T=lnR0/r	29,728

MORTPAK STABLE

Calculates a stable age distribution based on a set of age-specific central death rates (${}_{n}m_{x}$ values) or age-specific probabilities of dying (${}_{n}q_{x}$ values) or survivors (l_{x}) and the intrinsic rate of natural increase.

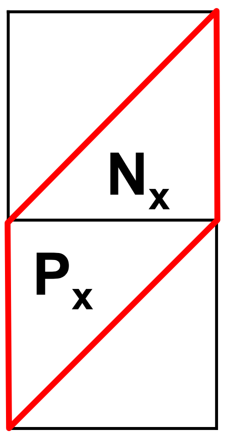
TITLE:	France Femmes 2010	
	Sex:	Females
	Data Type:	l(x)
Rate of Natural Increase:		-0.00078
(Output) open age group:		100+
Age Group	l(x)	
0	100000	
1	99685	
5	99620	
10	99584	
15	99541	
20	99457	
25	99340	
30	99191	
35	99010	
40	98696	
45	98167	
50	97300	
55	95985	
60	94205	
65	91853	
70	88584	
75	83729	
80	75631	
85	61693	
90	40608	
95	18021	
100	4119	

Intrinsic Vital Rates	
Birth rate=	0.01141
Death rate=	0.01219

Age Group	Proportion of Population in Indicated Age Group	Age	Proportion of Population Under Indicated Age
0 - 1	0.01138	1	0.01138
1 - 5	0.04557	5	0.05694
5 - 10	0.05713	10	0.11408
10 - 15	0.05733	15	0.17141
15 - 20	0.05752	20	0.22894
20 - 25	0.05769	25	0.28663
25 - 30	0.05784	30	0.34447
30 - 35	0.05797	35	0.40243
35 - 40	0.05806	40	0.46049
40 - 45	0.05804	45	0.51853
45 - 50	0.05786	50	0.57639
50 - 55	0.05744	55	0.63383
55 - 60	0.05674	60	0.69057
60 - 65	0.05574	65	0.74631
65 - 70	0.05429	70	0.80060
70 - 75	0.05210	75	0.85271
75 - 80	0.04849	80	0.90120
80 - 85	0.04211	85	0.94331
85 - 90	0.03152	90	0.97483
90 - 95	0.01776	95	0.99259
95 - 100	0.00627	100	0.99886
100+	0.00114		

Les modèles matriciels de population

Le Modèle (Matrice) de Leslie



$$M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_{\omega-1} & F_\omega \\ P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Px étant les probabilités perspectives annuelles de survie: L_{x+1}/L_x

Fx étant les quotients perspectifs nets de fécondité: fx*

$$\mathbf{F_x = N_x/P_x * L_0/S_0}$$

N_x naissances vivantes des filles
P_x femmes à l'âge x au 1er janvier
L_0/S_0 probabilité de survie entre naissance et à l'âge 0 révolu pour les filles

Lecture :

Leslie, P. H. (1945). On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*, 33(3), 183–212. https://doi.org/10.2307/2332297

Tabah, L. (1968). Représentations matricielles de perspectives de population active. *Population (French Edition)*, 23(3), 437–476. https://doi.org/10.2307/1529009

Une population fermée, réduite au seul sexe féminin

$\mathbf{P_{0,x}}$ population par âge, au moment 0 sous forme d'un vecteur-colonne
Matrice de Leslie: **M**

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{M} & & \mathbf{P_{0,x}} & & \mathbf{P_{1,x}} \\
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & F_a & \dots & F_b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_0 & & & & & & & & & & \\
 & p_1 & & & & & & & & & \\
 & & p_2 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & p_{\omega-1} & 0 &
\end{vmatrix}
& \times &
\begin{vmatrix}
P_{0,0} \\ P_{0,1} \\ \\ \\ \\ \\ P_{0,\omega}
\end{vmatrix}
& = &
\begin{vmatrix}
P_{1,0} \\ P_{1,1} \\ \\ \\ \\ \\ P_{1,\omega}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

px étant les probabilités perspectives annuelles de survie
fx étant les quotients perspectifs nets de fécondité; a, b âges limites de procréation

La population: $\mathbf{P_1 = M * P_0}$ $\mathbf{P_2 = M * P_1 = M^2 P_0}$ $\mathbf{P_n = M^n P_0}$

Ce type d'opérations on effectue en faisant les perspectives de population.

En répétant ce processus, on achemine progressivement la population de départ vers l'état stable impliqué par les conditions de mortalité et de fécondité retenue.

Valeurs propres, vecteurs propres

Soit **L** une matrice n × n et **X** un vecteur n × 1. Un nombre qui vérifie $\mathbf{L} \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{X}$ s'appelle **une valeur propre** de la matrice **L**.

A chaque valeur propre est associé au moins **un vecteur propre X**

Dans le cas d'une matrice de Leslie, le vecteur propre, associé à la valeur propre (première; réelle) **dominante λ_0, représente la distribution par âge de la population stable.**

Le taux d' accroissement d'une population stable (r) est déterminé par la relation: $\lambda_0 = e^r$ soit $r = \ln(\lambda_0)$.

Pour les groupes d'âges quinquennaux: $\lambda_0 = e^{5r}$ $r = [\ln(\lambda_0)]/5$

$$P_n = M^n P_0 \qquad P_{n+1} = \lambda_0 P_n \qquad M^{n+1} = \lambda_0 M^n$$

France métropolitaine 2010; femmes; données initiales

Âges: 0-110 ans

Femmes: effectifs des femmes au 1er janvier 2010

age	Femmes	Lx_fem	px_fem	fx_fi_p_L0
0	385 898	99704	0,99965	0
1	374 975	99669	0,99977	0
2	373 261	99646	0,99987	0
3	380 265	99633	0,99991	0
4	374 115	99624	0,99993	0
5	371 908	99617	0,99994	0
6	373 203	99611	0,99992	0
7	375 064	99603	0,99991	0
8	382 386	99594	0,99993	0
9	388 433	99587	0,99993	0
10	374 381	99580	0,99993	0
11	371 459	99573	0,99992	0
12	365 244	99565	0,99991	0,00001
13	370 662	99556	0,99990	0,00007
14	369 092	99546	0,99989	0,00027
15	359 953	99535	0,99986	0,00092
16	359 411	99521	0,99986	0,00225
17	379 968	99507	0,99983	0,00464
18	388 423	99490	0,99978	0,00905
19	391 845	99468	0,99978	0,01417
20	394 628	99446	0,99977	0,01946

px_fem = Lx+1_femmes/Lx_femmes; probabilité perspective de survie

fx_fi_p_L0 quotient perspectif net de fécondité $N_x/P_x * L_0/S_0$

SAS 9.3 Module: PROC IML: langage matriciel

1) Matrice M de Leslie: ***M0***

```
proc IML;
use d;
read all var {PX_FEM
FX_FI_p_L0}into A0;
read all var {Femmes}into
PF;
M0= j(111,111,0);
P0= j(111,1,0);
Pstab= j(111,1,0);
do j=1 to 111;
M0[1,j]= A0[j,2];
P0[j,1]=PF[J,1];
end;
do i=2 to 111;
M0 [i,i-1]=A0[i-1,1];
end;
```

Matrice de Leslie

France 2010

	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13	COL14	COL15	COL16
ROW1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00001	0.00007	0.00027	0.00092
ROW2	0.99965	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW3	0	0.99977	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW4	0	0	0.99987	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW5	0	0	0	0.99991	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW6	0	0	0	0	0.99993	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW7	0	0	0	0	0	0.99994	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW8	0	0	0	0	0	0	0.99992	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW9	0	0	0	0	0	0	0	0.99991	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW10	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99993	0	0	0	0	0	0	0
ROW11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99993	0	0	0	0	0	0
ROW12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99993	0	0	0	0	0
ROW13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99992	0	0	0	0
ROW14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99991	0	0	0
ROW15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.9999	0	0
ROW16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99989	0
ROW17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.99986
ROW18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2) Calcul des valeurs et des vecteurs propres

```
V=eigval(M0);
r=V[1,1];
r=log(r);
Psta=eigvec(M0);
do i=1 to 111;
Pstab[i,1]=Psta[i,1];
end;
```

3) Calcul de la population stable équivalente

```
i=0;
do until (Dif<=0.1);
i=i+1;
Pi=M0**i*P0;
Pis=Pi[+,];
Pir= Pi/Pis[1,1]*1000;
sstab=Pstab[+,];
Stab=Pstab/sstab[1,1]*1000;
R=Pir-Stab;
Dif=ABS(R);
sumdif=sum(Dif);
end;
```

France métropolitaine 2010

	POPULATION	Effectifs relatifs p.1000	
			différence
	population	stable	stable -
	stable	équivalente	équivalente
0	11,3969	11,3774	0,0194
1	11,4013	11,3784	0,0229
2	11,4072	11,3816	0,0256
3	11,4142	11,3869	0,0273
4	11,4216	11,3937	0,0279
5	11,4293	11,4019	0,0274
6	11,4371	11,4114	0,0257
7	11,4447	11,4219	0,0228
8	11,4521	11,4333	0,0189
9	11,4598	11,4459	0,0140
10	11,4676	11,4592	0,0083
11	11,4753	11,4732	0,0021
12	11,4829	11,4873	-0,0045
13	11,4904	11,5014	-0,0111
14	11,4977	11,5152	-0,0174
15	11,5050	11,5282	-0,0232
16	11,5120	11,5402	-0,0282
17	11,5189	11,5511	-0,0322
18	11,5255	11,5603	-0,0348
19	11,5315	11,5675	-0,0360
20	11,5375	11,5732	-0,0357

Population stable :
Calcul à partir de matrice M; i.e. d'une table de mortalité et d'une série des probabilités nets de fécondité.

Population stable équivalente :
Une population qui approche l'état stable avec une condition de différence définie.

Après 114 multiplications de matrice M

Taux intrinsèque d'accroissement naturel r = -0,00074

La valeur de r ainsi calculée n'est pas identique à sa valeur selon l'équation intégrale de Lotka, qui donne r = -0,00082. La différence vient du fait qu'il s'agit de deux approximations.

Effectif des femmes 1.1. 2010 32 379 225
Effectif des femmes 1.1. 2124 30 488 547

```
proc IML;
use d;
read all var {PX_FEM
FX_FI_p_L0}into A0;
read all var {Femmes}into PF;
M0= j(111,111,0);
P0= j(111,1,0);
Pstab= j(111,1,0);
do j=1 to 111;
M0[1,j]= A0[j,2];
P0[j,1]=PF[J,1];
end;
do i=2 to 111;
M0 [i,i-1]=A0[i-1,1];
end;
V=eigval(M0);
r=V[1,1];
r=log(r);
Psta=eigvec(M0);
do i=1 to 111;
Pstab[i,1]=Psta[i,1];
end;
Print M0 r [format=10.5];
i=0;
do until (Dif<=0.1);
i=i+1;
Pi=M0**i*P0;
Pis=Pi[+,];
Pir= Pi/Pis[1,1]*1000;
sstab=Pstab[+,];
Stab=Pstab/sstab[1,1]*1000;
R=Pir-Stab;
Dif=ABS(R);
sumdif=sum(Dif);
end;
print i [format=5.0]  Stab [format=10.5]
Pir [format=10.5] Dif[format=10.5];
create strur from Pir [colname='popr'];
append from Pir;
create strua from Pi [colname='popa'];
append from Pi;
quit;
data dd;
set d;
merge d strua;
run;
proc means data=dd sum maxdec=0;
var femmes popa;
run;
```

Populations semi-stables et quasi-stables

- **La population semi-stable** est un **concept mathématique**. C'est une population, qui à chaque instant, coïncide avec une population stable correspondant aux conditions de mortalité et de fécondité du moment. C'est une population qui garde, au cours du temps, une composition par âge constante. La propriété fondamentale d'une population semi-stable: ***la fonction de survie selon l'âge p(a,t), la fécondité par âge f(a,t) et le taux de variation r(t) dépendent du temps t, mais sont liés à un instant donné t par des relations qui sont celles de la population stable à l'instant t.*** Dans la population semi-stable l'état stable est atteint immédiatement.

- On appelle **population quasi stable** une population à fécondité constante et à mortalité variable (dans un univers de tables types de mortalité; de e_0=30 à e_0=70;TBR=3; AMM=29); les caractéristiques des populations de ce type sont voisines de celles des populations semi stables puisque leurs structures par âge varient très peu restant très proche à l'état stable. Telles sont les populations dans la première phase de la transition démographique mais *surtout celles des pays en voie de développement après la deuxième guerre mondiale*, quand l'espérance de vie commence à augmenter, mais la fécondité reste encore invariable. C'est un **concept expérimental**.