

Cours d'analyse démographique et modèles de populations niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

Chapitre 10

Version 2022

Modèles de la mortalité

- Ajustement avec une fonction analytique: l'idée de Gompertz et son développement par Makeham, Perks, Helligmen et Pollard ;
- Modèle de la mortalité infantile de Bougeois-Pichat
- Présentation tabulaire ou les tables type de mortalité :
 - Nations Unies,
 - A. Coale & P. Demeni,
 - S. Ledermann ;
- Modèle relationnelle de mortalité de W.Brasse

Lecture :

Nations Unies, *Manuel X 'Techniques indirectes d'estimation démographique'* Nations Unies, 1984, ST/ESA/SER.A/81 (disponible sur le site WEB des NU)

Kennet Hill, « Méthodes d'estimation indirecte », dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. III, *Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche*. Paris, INED, 2006, p.243-265

Josianne Duchène, « Les tables-types de mortalité », *ibid*, 2006, p.267-286

Rolland Pressat, *Éléments de démographie mathématique*. Edition de l'AIDELF, Paris, 1995, p.1-48

H. Leridon et L. Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.211-232

Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p.191-201

Jaques Vallin, Graziella Cazelli – “La table de mortalité d'une génération”, dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. I, *La dynamique des populations*. Paris, INED, 2001, p.165-212

Logiciels: Mortpak Lite v.4.3 <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/mortpak.asp>

La simplification et la réduction du nombre des hypothèses dans les projections (rappel) :

Problèmes:

- La désagrégation de la population (subdivision en groupes par âge et par sexe dans lesquels la mortalité, la fécondité et la migration sont plus ou moins *homogènes*) permet de d'obtenir une représentation précise d'un phénomène étudié, mais ***la multiplication des séries de nombres est encombrante***.
- L'application de la méthode des composantes demande des taux de fécondité, de mortalité et de migration par âge et par sexe pour chaque intervalle de la période de projection, par conséquent ***des hypothèses se multiplient***.

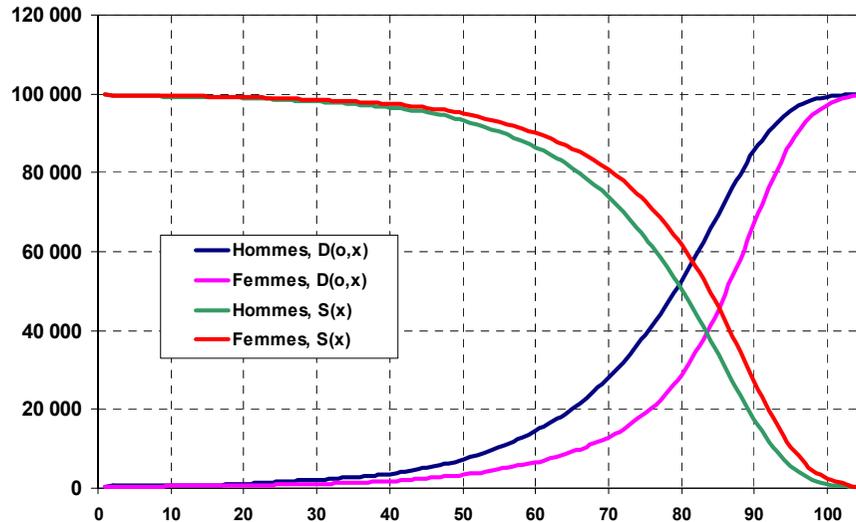
Solution plausible – réduction de l'information d'entrée d'un modèle :

- Construire un modèle et d'associer, ou de mettre en correspondance, les distributions des taux par âge avec le nombre réduit (un, deux ou trois) des paramètres.
- Le modèle représente *un standard* pour les distributions des taux par âge (risque), *basé sur l'expérience de plusieurs populations* pour lesquelles la qualité des données est bonne.

L'aspect mathématique de la table de mortalité

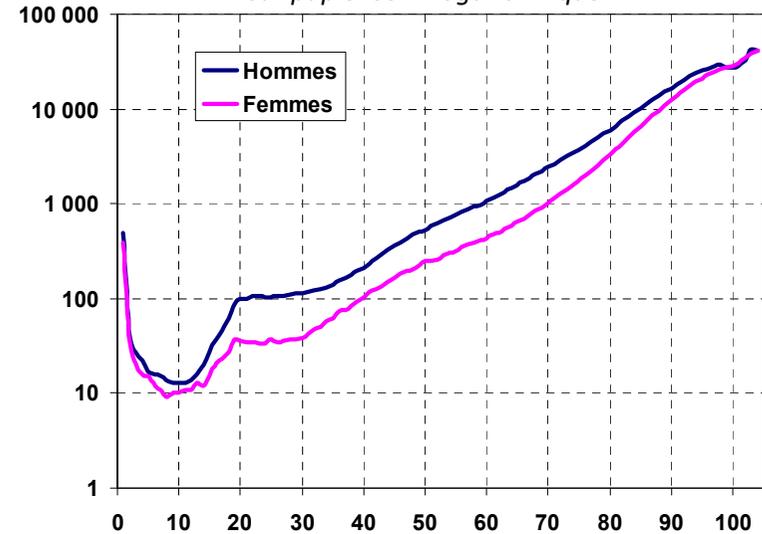
Survivants et décédés à l'âge x
(fonctions de survie et du risque de décès)

exemple : France 2001-2002



Quotients de mortalité par âge et par sexe
(fonction de la force de mortalité)

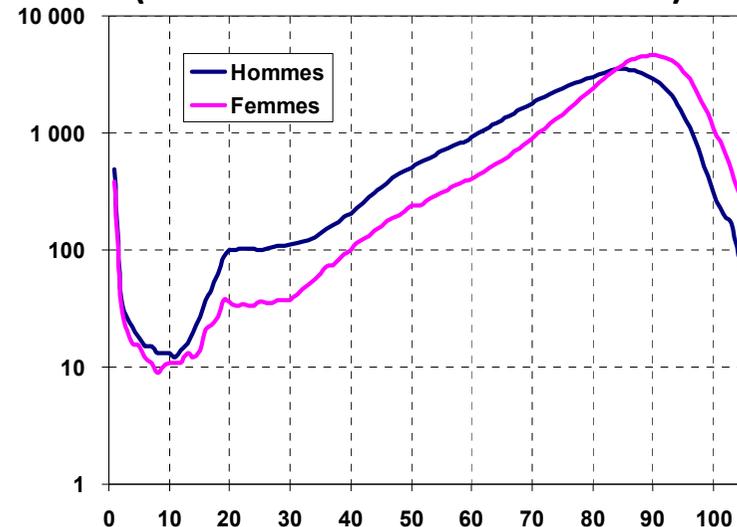
sur papier semi logarithmique



Tables de mortalité (rappel)

1. Indicateurs principaux
($l_x; {}_n d_x; {}_n q_x; {}_n p_x; {}_n m_x; {}_n a_x; {}_n L_x; T_x; e_x; D_x$)
2. Méthodes de constructions
(à partir des taux par âge, des quotients etc.)
3. Relations entre les indicateurs d'une table de mortalité

Décès par âge et par sexe
(fonction de la densité de décès)



Relations entre les indicateurs de la table de mortalité (rappel d'écriture avec le temps discret)

$${}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot {}_n m_x} \quad {}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + (n - a_x) \cdot {}_n m_x} \quad \text{si } a = \frac{n}{2} \rightarrow \quad {}_n q_x = \frac{2n \cdot {}_n m_x}{2 + n \cdot {}_n m_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x; \quad {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}; \quad l_{x+n} = l_x \cdot (1 - {}_n q_x) = l_x \cdot {}_n p_x; \quad l_x = \prod_{i=0}^x {}_n p_i$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}; \quad \sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = (l_0 - l_n) + (l_n - l_{2n}) + \dots + (l_{\omega-n} - l_{\omega}) = l_0; \leftarrow (l_{\omega} = 0) \quad \text{Si } l_0 = 1; \quad \therefore \sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = 1;$$

$$D_x = \sum_{\xi=0}^x {}_n d_{\xi}; \quad l_x + D_x = l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = D_{\omega}; \quad {}_n L_x = n \cdot \frac{(l_x + l_{x+n})}{2}; \quad {}_n L_x = n \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{\ln l_x - \ln l_{x+n}} \quad T_x = \sum_{\xi=0}^{\omega} {}_n L_{\xi}$$

$$\bar{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + a_x) \cdot {}_n d_x = e_0 \quad e_0 = \sum_{x=0}^{\omega-n} {}_n L_x \quad e_0 = a + \sum_{x=0}^{\omega-1} x \cdot {}_n d_x \quad e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Approche mathématique de la mortalité

1. Correspondance des indicateurs (discrets) de table de mortalité classique aux fonctions (continues)

Indicateurs de table :

Fonctions correspondantes :

S_x – nombre de survivants à l'âge exact x (l_x)	→	$S(x)$ – fonction survie := $l(x)$
${}_n d_x$ – nombre de décès entre l'âge x et $x+n$	→	$d(x)$ – fonction décès (densité de décès)
${}_n q_x$ – quotient annuel de mortalité à l'âge x	→	$q(x)$ – fonction quotient := $\mu(x)$ $\mu(x)$ – force de mortalité
D_x – nombre de décédés avant l'âge exact x	→	$D(x)$ – fonction de risque de décès

2. Passage des suites des indicateurs de la table de mortalité à des fonctions

$S(x)$ – fonction survie = on peut imaginer une interpolation à partir de l'ensemble de points de la suite $\{x, S_x\}$

$d(x)$ – fonction de la densité de décès → difficile à partir de la suite $d(x, x+\Delta x)$, puisque si $\Delta x \rightarrow 0$, la valeur limite est nulle et par conséquent il ne pas possible de dénombrer des décès à une date (moment) ponctuel dont la durée est proche à zéro. La solution mathématique est de passer à

la densité de décès sur une intervalle infinitésimal

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(x + \Delta x)}{\Delta x} = -S'(x) = d(x)$ Il en résulte que le nombre de décès sur un intervalle infinitésimal $(x, x + dx) = d(x)dx$

$q(x)$ – fonction quotient (force de mortalité) se fabrique aussi à partir de $S(x)$ avec les même précautions que pour $d(x)$

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x + \Delta x)}{\Delta x \cdot S(x)} = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow q(x) = -[\ln S(x)]' \rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(x) dx}$$

juste pour écriture
 $q(x) := \mu(x)$

voir le cours d'analyse chapitre 5 diapositive 35

Relations entre les indices de table et les fonctions continues associées

x_m et x_M – deux points d'inflexions de la fonction survie, qui correspondent au minimum et au maximum de densité des décès.

$S(x)$ est donc concave sur les intervalles $(0, x_m)$ et $(x_M, \omega) := S''(x) \geq 0$, si $x \in \begin{cases} (0, x_m) \\ (x_M, \omega) \end{cases}$;

Par conséquent sur ces intervalle $d(x)$ est décroissante, donc $d(x) > d(x + \theta) = d_x$

et $\mu(x) > {}_1q_x$

En revanche $S(x)$ est convexe sur l'intervalle $(x_m, x_M) := S''(x) \leq 0$, si $x \in (x_m, x_M)$

alors $d(x) < d(x + \theta) = d_x$ et $\mu(x) < {}_1q_x$

Par définition $\mu(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow \ln S(x) = -\int \mu(x) dx + \ln C \rightarrow$

$$S(x) = C \cdot e^{-\int \mu(x) dx + \ln C} = C \cdot e^{-F(x)}$$

$\ln C$ – une constante arbitraire
 $F(x)$ – une fonction de x

Sachant que ${}_1q_n = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x}$ on peut écrire ${}_1q_n = 1 - \frac{S_0 \cdot e^{-\int_0^{x+1} \mu(\xi) d\xi}}{S_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu(\xi) d\xi}} \rightarrow$

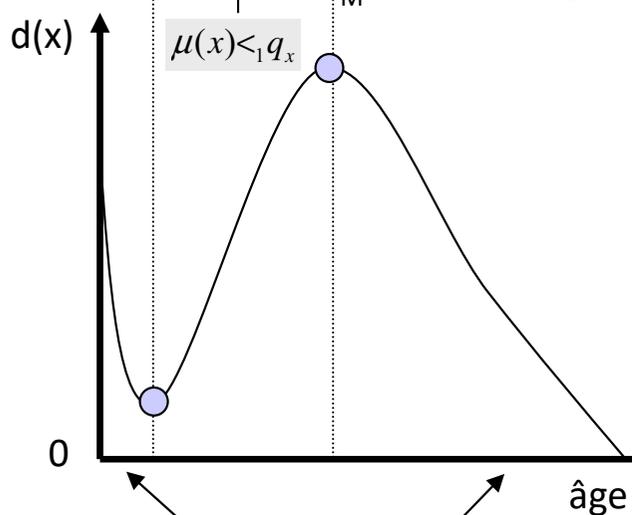
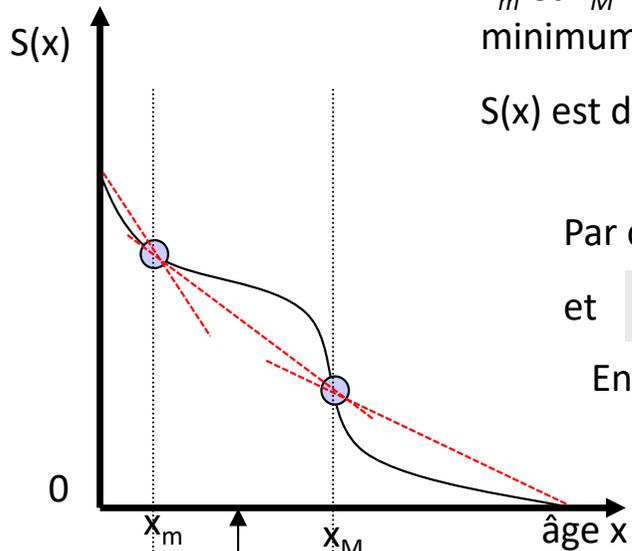
$${}_1q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(\xi) d\xi} = 1 - e^{-\mu}$$

ou simplement $e^{-\mu(x)} = {}_1p_x = 1 - {}_1q_x$

Ce qui donne une possibilité pour μ d'être > 1 sous la condition que $\ln(1 - {}_1q_x) > 1$

Cette condition est remplie dès que $1 - {}_1q_x < e^{-1}$, $:= {}_1q_x > 0,632$

D'après les tables de Kannisto-Tatcher une telle situation a lieu après l'âge de 110 ans voir <http://www.demogr.mpg.de/databases/ktddb/>



$\mu(x) > {}_1q_x$

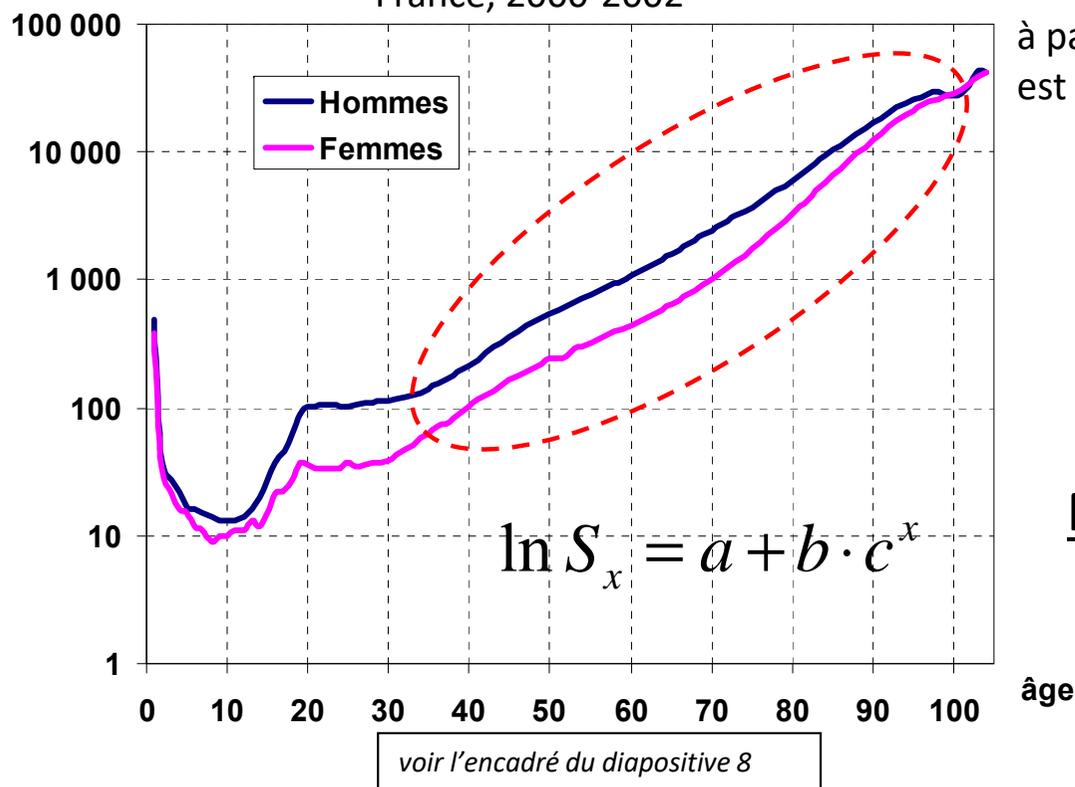
Une hypothèse : le risque est une fonction paramétrique de l'âge

La formule de Gompertz-Makeham

L'idée de Gompertz, 1825:

résistance individuelle à la mort $\frac{1}{\mu(x)}$ augmente avec l'âge à taux constant $k \rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = k$

Quotients de mortalité (probabilité de mourir)
France, 2000-2002



$$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$$

à partir de l'âge ~30-40 ans le logarithme du taux de mortalité est une fonction linéaire de l'âge

$$\ln [\mu(x)] = \ln \alpha + \beta \cdot x$$

α – est le paramètre de niveau
(de l'espérance de vie « naturelle »)

β – est le paramètre la vitesse de extinction

Makeham, 1860: $\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} + \gamma$

où γ – paramètre qui détermine l'influence des facteurs de la mortalité « exogène » (accidents, infection etc.)

GOMPertz Benjamin, 1825. – On the nature of the function expressive of the law of the human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies, Philosophical Transactions of the Royal Statistical Society, vol. 27, n° 2, p. 513- 583.

MAKEHAM William M., 1860. – On the law of mortality and the construction of annuity tables, The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, vol. 8, p. 301-310.

MAKEHAM William M., 1867. – On the law of mortality, Journal of the Institute of the Actuaries, n° 13, p. 325-67.

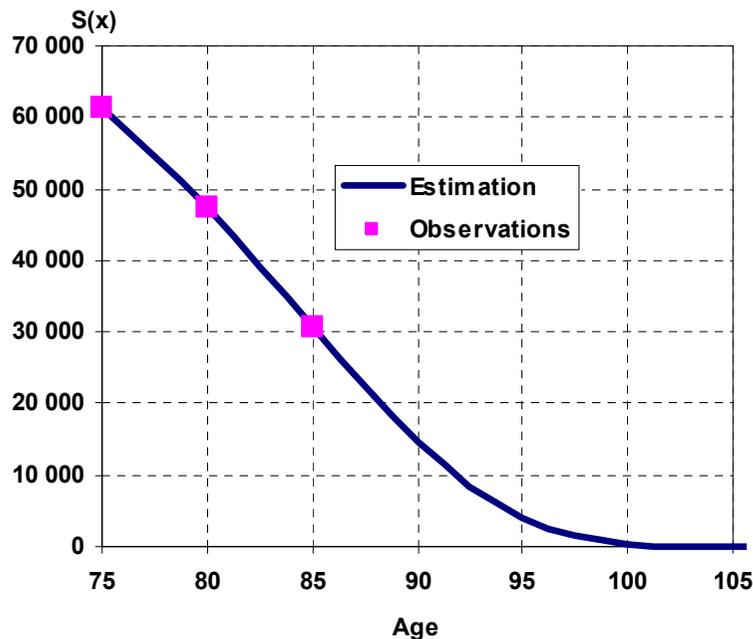
Application de la formule de Gompertz pour extrapoler (« fermer ») une table de mortalité

$$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} \quad \Rightarrow \quad S(x) = C \cdot a^{b^x}$$

On peut estimer les paramètres C , a et b à partir de trois valeurs d'une table de mortalité

$$b = \left[\frac{\ln \frac{S(x+2n)}{S(x+n)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}} \right]^{\frac{1}{n}}; \quad a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{b^x \cdot (b^n - 1)} \right); \quad C = S(x) \cdot \exp(-b^x \cdot \ln a)$$

Exemple: France, table de mortalité 2000-2002



$$b = \left[\frac{\ln \frac{S(85)}{S(80)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}} \right]^{\frac{1}{5}} = 0,999886;$$

$$a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{b^{75} \cdot (b^5 - 1)} \right) = 1,113403$$

$$C = S(75) \cdot \exp(-b^{75} \cdot \ln a) = 87860,06$$

x	S(x)	$\hat{S}(x)$
75	61250	61250
80	47391	47391
85	30554	30554
90		14418
95		3988
100		442
105		10
110		0

Problème d'estimation de la mortalité aux âges très élevés

On observe qu'aux âges très élevés la croissance de la force de mortalité ralentit avec l'augmentation de l'âge

Perks W. (1932) – “On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics” *Journal of the Institute of Actuaries*, 109, p.225-240

Vaupel J.W., K.S.Manton and E.Sallard (1979)– “The impact of heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamic of Mortality” *Demography*, Vol.16, no.3, p.439-454

Horiuchi, Shiro and A.J.Coale (1990) – “Age patterns of Mortality for Older Women: An Analysis Using the Age-specific Rate of Mortality Change with Age” *Mathematical Population Studies*. Vol.2, no.4, p.245-267

Solution de Perks: recours à un modèle **logistique** :

soit $\mu(x)$ – la force de mortalité à l'âge exact x telle que $\mu(x) = \frac{\beta \cdot \gamma^x}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$
(son estimateur est le taux de mortalité)

et son complément à un $1 - \mu(x) = \frac{1}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$ d'où

$\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} = \beta \cdot \gamma^x \Rightarrow$ donc logit de $\mu(x)$: $\ln \left[\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} \right] = a \cdot x$ est une fonction linéaire de l'âge

logit de $\mu(x)$

Possibilité d'ajustement de la fonction $\mu(x)$ « force de la mortalité » ou fonction quotient par morceau

Exemple du Roland Pressat (1995), p.4-5

Soit sur un intervalle la courbe de survie pourrait être approximée par une parabole quadratique

$$S(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + f \cdot x^4$$

à partir de cet ajustement il est possible d'estimer les valeurs de la fonction de décès (densité) et de celle de quotient (force de mortalité) :

$$d(x) = -S'(x); \quad \mu(x) \equiv q(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

prenons 5 points d'âge (x) notés respectivement -2; -1; 0; +1; +2, alors pour l'âge 0 la densité de décès $d(0)$ sera égale à $-S'(0) = -b$

On peut estimer le paramètre b , à partir du système d'équations:

$$\begin{cases} S(-1) = a - b + c - d + f \\ S(+1) = a + b + c + d + f \\ S(-2) = a - 2b + 4c - 8d + 16f \\ S(+2) = a + 2b + 4c + 8d + 16f \end{cases}$$

Qui nous donne $-b = d(x) = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12}$

et $q(x) = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12 \cdot S(x)}$

Voir à titre d'exemple la table de mortalité française de 1816 dans la HMDB <https://www.mortality.org/>

Mortalité aux âge très jeunes (ajustement parabolique)

Aux âges précoces la diminution de la mortalité avec l'augmentation de l'âge est très rapide et non linéaire d'évidence

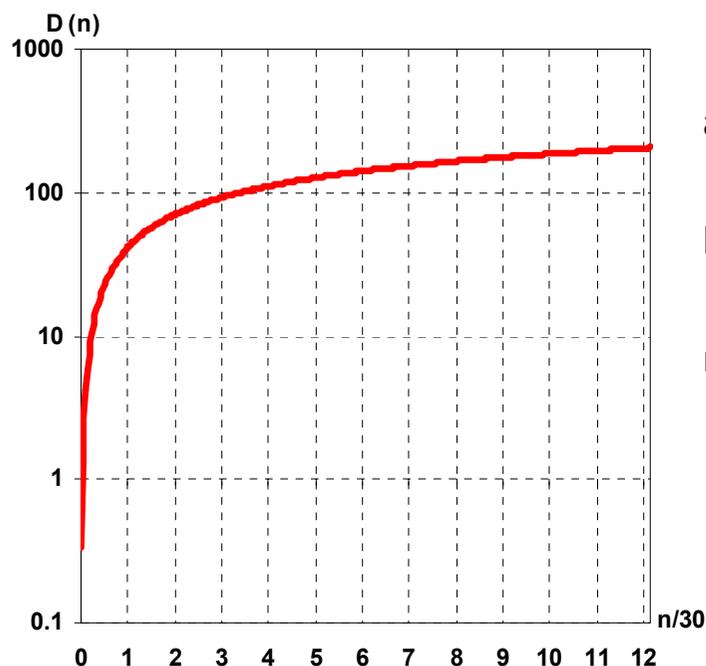
Bourgeois-Pichat J. (1946) – « De la mesure de la mortalité infantile » *Population*, Vol.1, N°1, p.53-68

Bourgeois-Pichat J. (1951) – « La mesure de la mortalité infantile. II, Les causes de décès » *Population*, Vol.6, N°3, p.459-480

Lantoin C., et R.Pressat (1984) – « Nouveaux aspects de la mortalité infantile » *Population*, Vol.39, N°2, p.253-264

Solution de Bourgeois-Pichat : décomposition de la mortalité infantile en mortalité « endogène » et celle « exogène ». Soit $D(n)$ est la probabilité de mourir avant l'âge exact $n+1$, telle que

$$D(n) = a + b \cdot [\ln(n + 1)]^3$$



a – la mortalité exogène (accidents, infections etc.) : supposée d'être indépendante de l'âge (une constante)

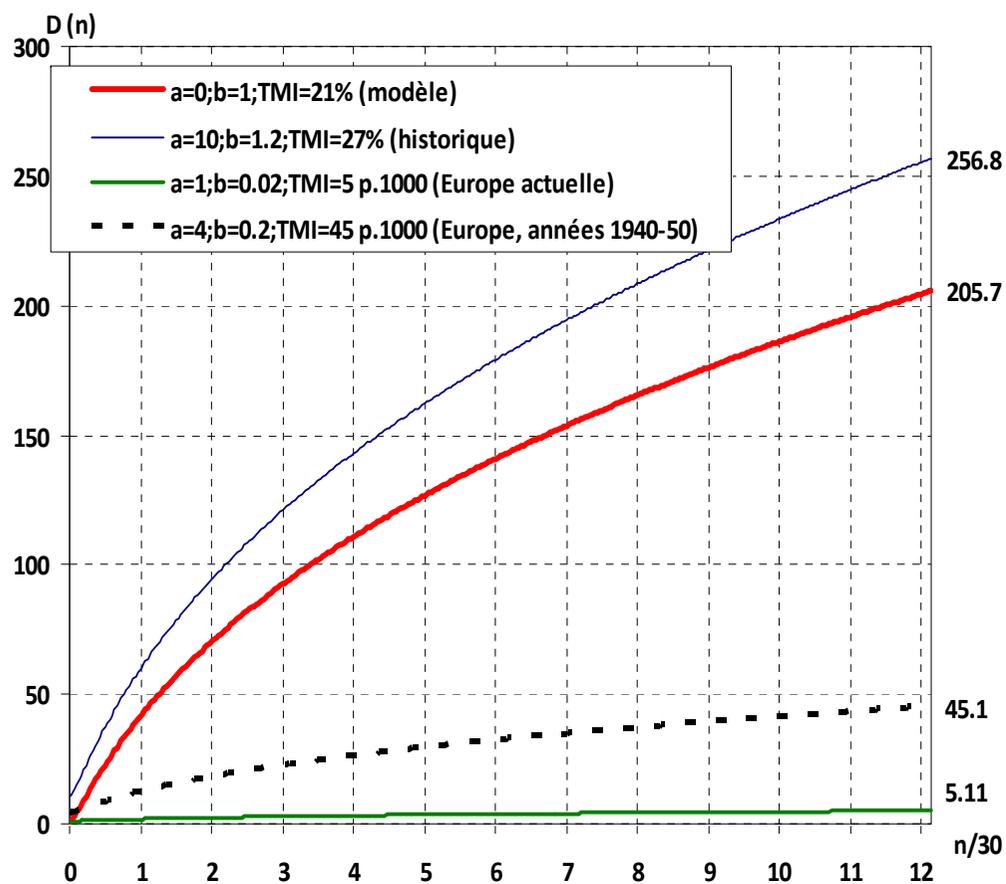
b – le paramètre de la mortalité « endogène », celle-ci est dépendante de l'âge en jours

n – l'âge révolu en jours (on ajoute 1 pour transformer l'âge révolu à l'âge atteint dans la journée puisque $\ln(0)$ n'existe pas).

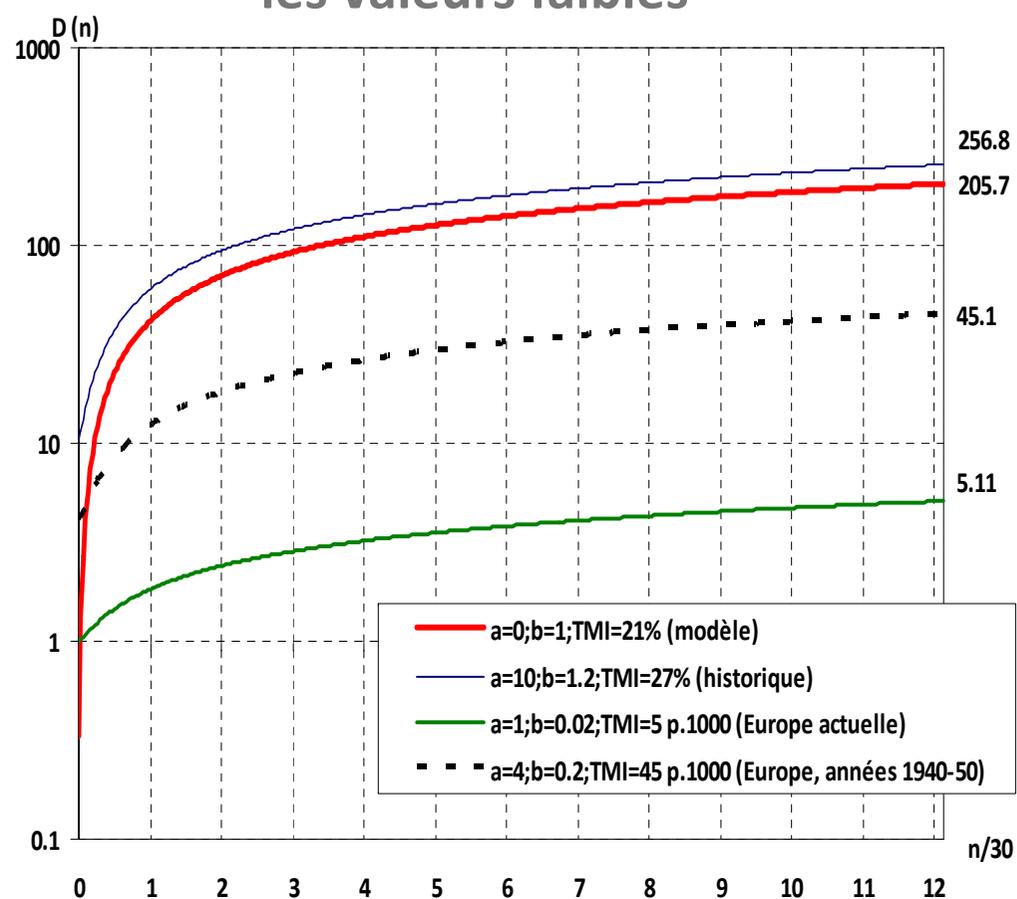
Dans ce modèle l'expression $[\ln(n + 1)]^3$ représente une fonction de la « mortalité infantile naturelle », a est le paramètre du niveau historique de la mortalité infantile, et b est le paramètre de la position .

Évolution de la mortalité infantile dans l'optique du modèle de JBP

Échelle logarithmique pour mieux voir les valeurs élevées



Échelle linéaire pour mieux voir les valeurs faibles



Modèle paramétrique généralisé de la mortalité

Heligmen L. and H.Pollard (1980) – “The Age Patterns of Mortality” *Journal of the Institute of Actuaries*. Vol.107, Part 1, no 434, p.49-80

Solution de Heligmen and Pollard: modèle représentant la somme de trois courbes (trois fonctions exponentielles*) et comporte huit paramètres

La première composante diminue rapidement.

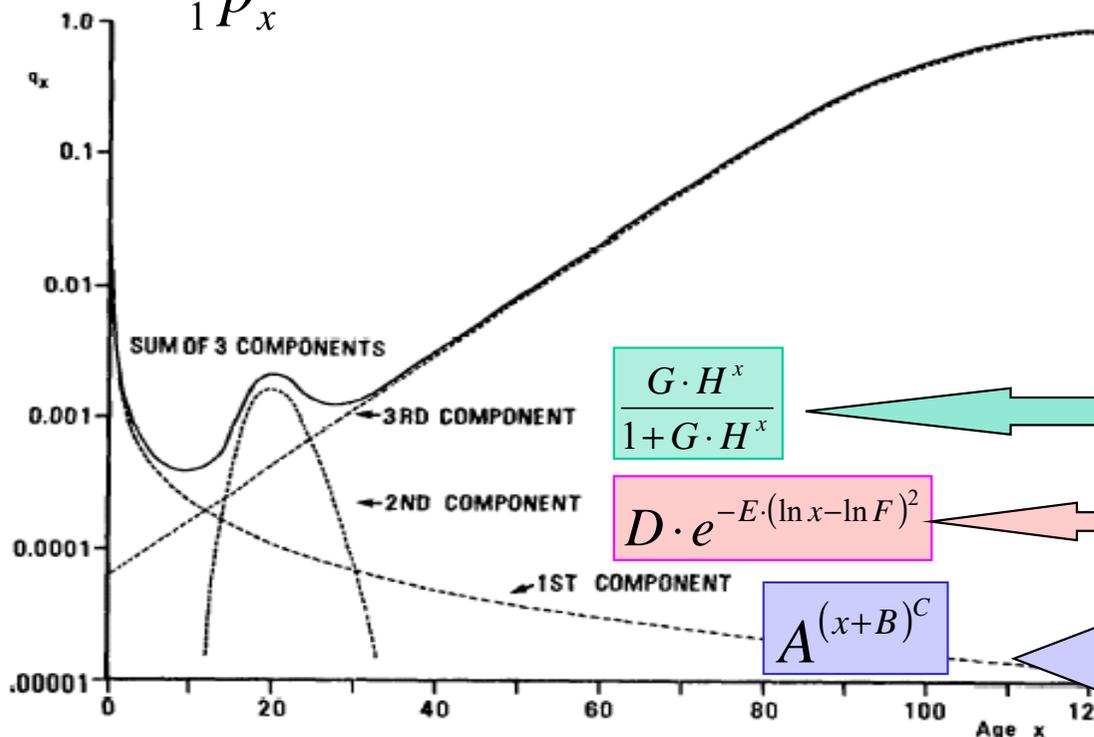
La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

La troisième composante est de même nature que la formule logistique pour les âges élevés

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1P_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

Il est aussi possible de décrire la mortalité ainsi, mais dans ce cas q_x peut théoriquement, mais jamais en pratique dépasser 1

$${}_1q_x = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + \frac{G \cdot H^x}{1 + G \cdot H^x}$$



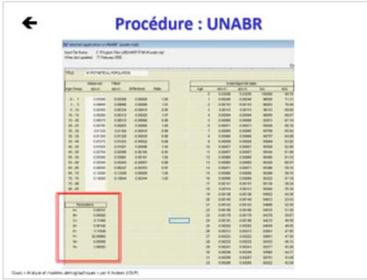
Mortalité croissant selon la loi de Gompertz-Perks

Surmortalité aux âges moyens

Mortalité infantile et juvénile
 A - niveau de la MI;
 B - paramètre de position
 C - paramètre de vitesse

Figure 1. The graduated q_x curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).

* - rappel : $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$



Paramètres du modèle de Helligmen-Pollard

(estimation → Mortpak for Windows, procédure UNARB)



$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

La première composante diminue rapidement.

$$A^{(x+B)^C}$$

A – niveau de la MI;
B – paramètre de position
C – paramètre de vitesse

La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

$$D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2}$$

F – paramètre de position
E – paramètre de l'extension (largeur)
D – paramètre de niveau (hauteur)

La troisième composante a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés (vieillesse)

$$G \cdot H^x$$

G – niveau de base de la mortalité
H – la vitesse de croissance

OU

$$H^{x-x_0}$$

x_0 – âge, où $q_x/p_x=1 \rightarrow$
($q_x = 0.5$)

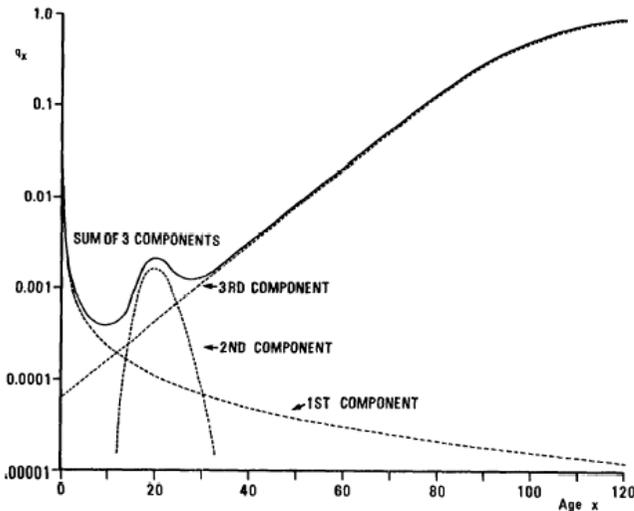
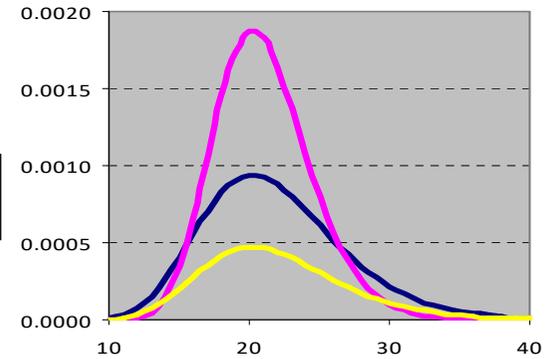
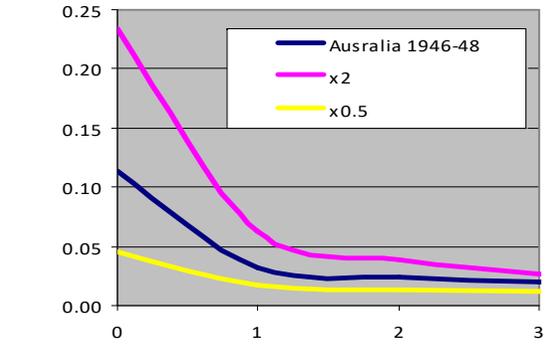
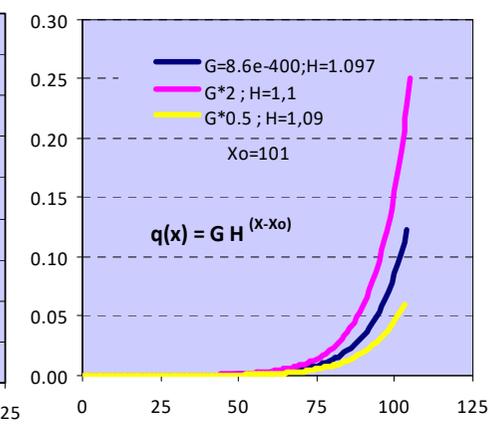
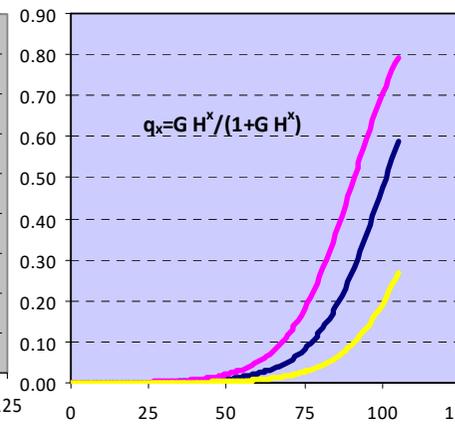
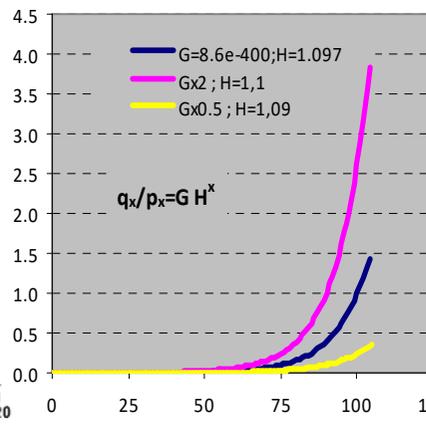
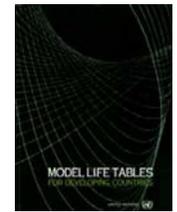


Figure 1. The graduated q_x curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).



Lecture : A.Rogers and K.Gard « Application of the Helligmen-Pollard model mortality schedule » // *Population Bulletin of the United Nations*, No. 30 -1991, p.79-105

II. Modèles tabulaires : tables types



Lecture :

Josianne Duchène « Les tables types de mortalité » Dans: G.Caselli, J.Vallin et G.Wunsch *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. VIII Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche, INED, Paris, 2006 p.267- 290

UN. Introduction aux tables-types de mortalité sur <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/model-life-tables.asp>

1. Tables types de mortalité des Nations Unies, 1955: modèle avec un seul paramètre

United Nations (1955) – *Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Underdeveloped Countries*. NY

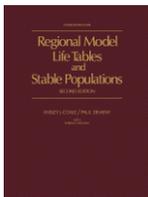
Données de base: 158 tables de mortalité des pays en développement (mauvaise qualité des données)

Principe de construction: les équations récurrentes ou les calculs en chaîne $\rightarrow {}_5q_x$ (probabilité de mourir entre l'âge x et $x+5$) est la fonction quadratique de ${}_5q_{x-5}$ à l'exception de ${}_1q_0$ et ${}_4q_5$ pour lesquelles les amplitude d'intervalles = 1 et 4)

$${}_5q_x = A + B \cdot {}_5q_{x-5} + C \cdot {}_5q_{x-5}^2$$

+ **Avantage:** simplification des hypothèse, modèle avec une seule entrée (mortalité infantile: ${}_1q_0 \rightarrow {}_4q_5 \rightarrow {}_5q_{10}$ etc.)

– **Désavantage:** biais systématique (erreur moyenne $\neq 0$) ou la reproduction de l'erreur initial à cause des calculs en chaîne (surestimation de l'espérance de vie de ≈ 2 ans en moyen .
(Cf Gabriel K.R., Ronen I. – Estimates of mortality from infant mortality rates. *Population Studies*, 1958, vol.12, no. 2, p.164-169 : ont proposé de passer de ${}_1q_0$ à ${}_4q_1$ par une relation quadratique et d'estimer les quotients de mortalité comme une fonction linéaire de ${}_1q_0 : {}_nq_5 = A+B \cdot {}_1q_0$)



2. Tables types de mortalité régionales de Coale–Demeny, 1966 et 1983: modèle à deux entrées

Coale A.J. and P. Demeny (1966) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. Princeton. Princeton University Press

Coale A.J. and P. Demeny with B. Vaughan (1983) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. NY, Academic Press

<https://www.sciencedirect.com/book/9780121770808/regional-model-life-tables-and-stable-populations>

Données de base: initialement 326 tables de décès par sexe et de population au recensement par âge et par sexe, 192 tables de mortalité sélectionnées d'après étude visuelle de la dispersion des ${}_5q_x$

Principe de construction: classification des tables selon la similarité des structures des taux de mortalité par âge (plus exactement – selon la similarité de la densité de probabilité de mourir).

1e étape: pour chaque âge tous les valeurs de ${}_nq_x$ ont été ordonnées

2e étape: pour chaque rang de ${}_nq_x$ les tables de mortalité type ont été préliminairement construites.

3e étape: chaque table initiale a été comparée avec une table type préliminaire ayant à peu près le même niveau de mortalité générale (e_0) et les tables défailtantes ont été rejetées

4e étape: 192 tables sélectionnées ont été réparties en 4 groupes selon la similarité des distributions des survivants

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Coale-Demeny.

Type « Nord »

Donnée de base: 9 tables en provenance de Suède (avant 1920), de Norvège et d'Islande

Particularités: la mortalité infantile et la mortalité aux âges très élevés sont relativement basse

Type « Sud »

Donnée de base: 22 tables en provenance d'Espagne, du Portugal et d'Italie méridionale

Particularités: la mortalité avant l'âge de 5 ans et après l'âge de 65 est élevé, mais la mortalité dans l'intervalle d'âge 40-60 ans est faible.

Type « Est »

Donnée de base: 31 tables en provenance d'Allemagne, d'Autriche, de Tchécoslovaquie, du Nord de l'Italie, d'Hongrie et de Pologne

Particularités: la mortalité infantile et après l'âge de 50 ans est très élevée.

Type « Ouest »

Donnée de base: toutes les autres tables (130) de l'Europe de l'Ouest, des populations européennes d'outre-mer, de Japon (milieu de 20e siècle) et de Taiwan

Particularités: il n'y a pas des déviations substantielles.



Procédure : COMPAR

compare les taux ou les quotients de mortalité avec tous les tables type de l'ONU et Coale-Demeny

Procédure : COMPAR

Selected application is COMPAR (compar.mpl)
 Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK 4\compar.mpl
 When last updated: 04 January 2002

Comparison of empirical mortality rate

Age Group	Empirical q(x,n)	Implied Life Expectancy at Birth									
		United Nations Models						Coale-Demeny Models			
		Latin Am.	Chlean	So. Asian	Far East	General	West	North	East	South	
0 - 1	0.11856	47.9	55.3	53.8	42.1	46.8	50.1	47.3	54.8	53.3	
1 - 5	0.09301	50.0	40.4	51.7	39.1	46.0	45.2	48.7	44.2	51.2	
5 - 10	0.02970	47.5	37.4	45.9	39.4	45.6	43.1	53.6	43.1	45.2	
10 - 15	0.01687	45.8	42.8	40.6	44.3	46.5	49.8	53.7	43.6	45.4	
15 - 20	0.02066	48.0	48.4	43.8	52.3	50.3	52.2	51.9	46.5	48.3	
20 - 25	0.02531	50.3	50.9	43.6	54.2	52.1	53.2	51.3	48.0	49.0	
25 - 30	0.02866	51.2	51.6	42.4	55.4	52.4	53.3	51.8	48.8	48.5	
30 - 35	0.03173	52.2	52.7	43.2	55.9	53.3	53.7	52.6	49.0	47.4	
35 - 40	0.03560	53.1	53.4	43.2	57.1	53.7	53.8	53.1	49.1	46.7	
40 - 45	0.03986	53.3	54.6	44.3	58.7	54.5	54.2	53.8	48.9	46.0	
45 - 50	0.04466	55.2	57.2	47.9	62.2	57.2	55.9	53.7	50.7	46.0	
50 - 55	0.05829	55.0	57.6	52.2	63.9	58.5	57.1	53.3	52.2	46.8	
55 - 60	0.07924	56.1	59.0	56.3	65.3	60.0	57.3	52.6	54.6	47.5	
60 - 65	0.12069	54.4	57.4	57.5	64.3	58.9	56.5	51.0	55.0	49.2	
65 - 70	0.18452	53.2	56.9	56.6	62.6	57.6	54.1	50.1	56.0	49.9	
70 - 75	0.28516	48.8	52.1	54.3	58.9	54.6	51.8	48.1	56.2	51.5	
75 - 80	0.41943	42.4	46.4	51.1	54.0	50.9	49.5	46.2	57.1	53.7	
Average absolute deviation from the median											
Ages 0 to 10	0.8	6.0	2.7	1.0	0.4	2.3	2.1	3.9	2.7		
Ages 10 and over	3.0	3.7	5.3	4.5	3.0	1.8	1.6	3.4	1.7		
Ages 0 and over	3.1	4.8	5.1	6.6	3.8	2.8	1.9	3.8	2.1		
Medn(0-10)-Medn(10+)	-4.8	-12.6	5.6	-18.5	-8.1	-8.5	-3.6	-5.7	3.4		

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

Sélection d'une table de mortalité dans les tables la mortalité type régionales de Coale-Demeny.

1^{ère} étape: Choisir la famille des table (Nord, Sud, Est, sinon – Ouest) à partir de l'analyse de la mortalité par âge.

2^{ème} étape: Choisir le niveau de mortalité à partir de l'espérance de vie à l'âge 10 ans (e_{10})

24 niveau de mortalité dans chaque famille

Niveau 1 → $e_{10}=20,0$

Niveau 2 → $e_{10} = 22,5$ (niveau 1 + 2,5)

Niveau 3 → $e_{10} = 25,0$ (niveau 2 + 2,5)

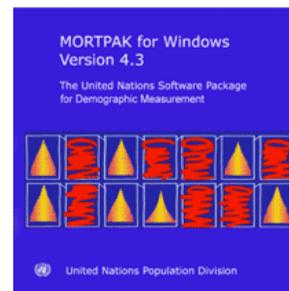
.....

Niveau 24 → $e_{10} = 77,5$ (niveau 23 + 2,5)

La dernière révision (modification) des tables de Princeton date de 1989 et concerne les âges >80 ans: croissance exponentielle de Gompertz a été remplacé par la croissance linéaire du $[\ln({}_5m_x) - \ln({}_5m_{x-5})]$, et l'augmentation de e_0 jusqu'à 80 ans (niveau) pour toutes les familles de tables – types

Procédure : MATCH

calcule tables de mortalités des familles UN et Coale-Demeny correspondant à un niveau de mortalité (e_x)



Procédure : MATCH

Age	Sex	Mortality Rate	...
0	M	0.0000	...
0	F	0.0000	...
10	M	0.0000	...
10	F	0.0000	...
20	M	0.0000	...
20	F	0.0000	...
30	M	0.0000	...
30	F	0.0000	...
40	M	0.0000	...
40	F	0.0000	...
50	M	0.0000	...
50	F	0.0000	...
60	M	0.0000	...
60	F	0.0000	...
70	M	0.0000	...
70	F	0.0000	...
80	M	0.0000	...
80	F	0.0000	...

Age	Sex	Mortality Rate	...
0	M	0.0000	...
0	F	0.0000	...
10	M	0.0000	...
10	F	0.0000	...
20	M	0.0000	...
20	F	0.0000	...
30	M	0.0000	...
30	F	0.0000	...
40	M	0.0000	...
40	F	0.0000	...
50	M	0.0000	...
50	F	0.0000	...
60	M	0.0000	...
60	F	0.0000	...
70	M	0.0000	...
70	F	0.0000	...
80	M	0.0000	...
80	F	0.0000	...

3. Tables type de mortalité : le système Ledermann

Ledermann, S. et J.Breas (1959) – «Les dimensions de la mortalité » *Population*, vol.14, N°4, p.637-682 (ACP)

Ledermann, Sully (1969) – *Nouvelles tables-types de Mortalité*. INED, Travaux et Document, cahier N° 53. Paris PUF

Le Bras Hervé. « Nouvelles tables-types de mortalité. Présentation d'un cahier de l'I.N.E.D. », *Population*, 23^e année, n°4, 1968. pp. 739-744;

Données de base: 154 tables de mortalité (pratiquement la même base que l'ONU a utilisées pour les tables type 1955)

Principe de construction: analyse factorielle (analyse des composantes principales), modèle de régressions avec un ou deux paramètres, et sept ou cinq variables indépendantes (entrées) respectivement.

+ **Avantage:** flexibilité extrême du modèle grâce à la multitude des variables indépendant, moyens statistiques d'évaluation de la magnitude de la divergence entre valeurs observées et celles estimées

– **Désavantage:** les relations dures entre la mortalité féminine et celle masculine (p.ex. l'impossible scénario où $e_0^h > e_0^f$)
Il est souvent difficile d'estimer les variables faute des données nécessaires

Tables type de Ledermann (suite)

5 facteurs principaux:

Modèle factoriel

- I. Le niveau de la mortalité générale
- II. Le rapport entre la mortalité juvénile et la mortalité des adultes
- III. La structure de la mortalité par âge aux âges élevés
- IV. La mortalité juvénile (dans l'intervalle d'âge 0-5 ans)
- V. La divergence de la mortalité par sexes

Expliquent **90%** de la dispersion

Modèle basé sur l'analyse de régression

Modèle à un paramètre: $\lg {}_5q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \lg Q \pm 2 \cdot s_{\bar{x}}$ s_x – erreur type (c'est optionnel)

Variables indépendantes: $e_0, {}_1q_0, {}_5q_0, {}_{15}q_0, {}_{20}q_{30}, {}_{20}q_{45}, m_{50+}$

Modèle à deux paramètres: $\lg {}_5q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \lg Q_1 + b_2(x) \cdot \lg Q_2 \pm 2 \cdot s_{\bar{x}}$

Variables indépendantes en couple: $Q_1 = {}_5q_0 \times 1000$ et $Q_2 = {}_{20}q_{45} \times 1000$;

il est possible par ailleurs d'appliquer les couples ${}_{15}q_0$ et ${}_{20}q_{30}$; ${}_{15}q_0$ et m_{50+}

Toutes les variables indépendantes se réfèrent à chaque sexe à l'exception de ${}_{20}q_{30}$ qui se réfère à la mortalité féminine uniquement.

Tables-type de Ledermann : 1 entrée

Algorithme :

Soit

lg – logarithme décimale (de base 10) ou \log_{10} ;

${}_nq_x$ – quotients p.1000;

s_x – l'erreur-type sur la valeur médiane

Modèle : $lg {}_5q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm 2 \cdot s_x$

$$1) Q = \left(1 - \frac{S_{50}^F}{S_{30}^F}\right) \cdot 1000 = (1 - 97197 / 99168) \cdot 1000 = 19,875$$

$$2) lg Q = lg(19,8754) = 1,2983$$

$$3) lg {}_nq_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm 2 \cdot s_x$$

$$4) {}_nq_x = 10^{(lg {}_nq_x)} = 10^{a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm (2 \cdot s_x)}$$

Table type : paramètres

âge	Ledermann 1 entrée			20q ₃₀ (F)		
	tableau 104 M			tableau 104 F		
x	a ₀ (x)	a ₁ (x)	s(x)	a ₀ (x)	a ₁ (x)	s(x)
0	-0.22091	1.06009	0.12323	-0.47773	1.14473	0.13166
1	-2.36521	1.90995	0.17434	-2.63745	2.02657	0.18514
5	-1.94537	1.49323	0.14533	-2.50610	1.73814	0.13046
10	-1.57599	1.23648	0.09729	-2.28551	1.57130	0.10862
15	-1.06772	1.09915	0.09499	-1.84746	1.45595	0.09631
20	-0.97845	1.13048	0.10637	-1.63270	1.41370	0.08679
25	-1.00334	1.14990	0.08888	-1.47801	1.36204	0.06163
30	-0.90987	1.12231	0.07638	-1.32682	1.30808	0.03721
35	-0.72924	1.06959	0.06405	-1.01560	1.18517	0.02110
40	-0.34395	0.93501	0.06912	-0.65000	1.04094	0.01186
45	0.14075	0.76160	0.06993	-0.13285	0.83607	0.03159
50	0.56188	0.62471	0.07062	0.25087	0.71293	0.04141
55	0.92476	0.51882	0.07344	0.56041	0.63438	0.05162
60	1.28459	0.42093	0.06699	0.92137	0.54406	0.05226
65	1.64323	0.32596	0.06177	1.28508	0.45518	0.05612
70	1.90536	0.27648	0.05324	1.70368	0.34393	0.05278
75	2.23374	0.19048	0.05130	2.10525	0.22992	0.05179
80	2.56071	0.09595	0.04824	2.45976	0.12846	0.05045

Estimations : France 2008-2010 (calculs en %)

Hommes

	médiane	+2s	-2s
0	14.30	25.23	8.11
1	1.30	2.91	0.58
5	0.98	1.92	0.50
10	1.07	1.67	0.68
15	2.29	3.54	1.48
20	3.09	5.04	1.89
25	3.09	4.65	2.05
30	3.53	5.01	2.48
35	4.56	6.13	3.40
40	7.41	10.19	5.39
45	13.48	18.60	9.77
50	23.60	32.67	17.05
55	39.66	55.62	28.28
60	67.78	92.27	49.79
65	116.53	154.87	87.68
70	183.79	234.85	143.83
75	302.72	383.39	239.02
80	484.49	605.01	387.97

Femmes

	médiane	+2s	-2s
0	10.20	18.70	5.56
1	0.99	2.31	0.42
5	0.56	1.03	0.31
10	0.57	0.94	0.34
15	1.10	1.72	0.71
20	1.59	2.38	1.07
25	1.95	2.59	1.47
30	2.35	2.79	1.98
35	3.34	3.68	3.03
40	5.03	5.31	4.76
45	8.97	10.37	7.75
50	15.01	18.17	12.41
55	24.21	30.71	19.09
60	42.44	53.98	33.36
65	75.17	97.34	58.05
70	141.32	180.21	110.83
75	253.37	321.62	199.61
80	423.20	533.88	335.46

Tables-type de Ledermann : 2 entrées

Soit

$S_{15}MF$ – paramètre d'une table de mortalité les deux sexes confondus ;

$S_{20}F$ et $S_{30}F$ – paramètres d'une table de mortalité le sexe féminin;

Modèle : $\lg {}_5q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \lg Q_1 + b_2(x) \cdot \lg Q_2 \pm 2 \cdot s_x$

1) $Q_1 = (1 - S_{15}MF/S_0) * 1000 = [1 - (99422 + 99524)/200000] * 1000 = 5.2700$; $\log_{10}(5.2700) = 0.7218$

2) $Q_2 = (1 - S_{20}F/S_{30}F) * 1000 = (1 - 97197/99168) * 1000 = 19.8754$; $\log_{10}(19.8754) = 1.2983$

3) ${}_nq_x = 10^{[b_0(x) + b_1(x) \cdot \log Q_1 + b_2(x) \cdot \log Q_2 \pm 2s_x]}$

Ledermann 2 entrées				${}_{15}q_0(MF)$ ${}_{20}q_{30}(F)$				
tableau 2 (M)				tableau 2 (F)				
x	b0	b1	b2	s	b0	b1	b2	s
0	0.30603	0.95702	-0.19020	0.05356	0.10203	1.05296	-0.23089	0.04901
1	-1.65487	1.29012	0.22450	0.08940	-1.89282	1.35238	0.25978	0.09834
5	-1.57653	0.66989	0.61807	0.12285	-2.10866	0.72182	0.79513	0.10006
10	-1.35880	0.39446	0.72114	0.08586	-2.08334	0.36719	1.09159	0.09992
15	-0.98183	0.15600	0.89535	0.09327	-1.77215	0.13678	1.27726	0.09495
20	-0.90656	0.13058	0.95990	0.10525	-1.60596	0.04857	1.35025	0.08660
25	-0.96542	0.06887	1.05993	0.08849	-1.46792	0.01831	1.33812	0.06151
30	-0.86001	0.09056	1.00400	0.07564	-1.31302	0.02508	1.27532	0.03705
35	-0.70102	0.05125	1.00264	0.06377	-0.98301	0.05919	1.10784	0.01989
40	-0.29549	0.08803	0.82001	0.06845	-0.65493	-0.00895	1.05263	0.01170
45	0.18151	0.07403	0.66488	0.06931	-0.16206	-0.05306	0.90539	0.03075
50	0.58836	0.04809	0.56188	0.07033	0.21643	-0.06256	0.79466	0.04078
55	0.93095	0.01124	0.50414	0.07327	0.54471	-0.02851	0.67163	0.05165
60	1.29465	0.01826	0.39707	0.06686	0.94088	0.03544	0.49776	0.05210
65	1.68789	0.08112	0.21998	0.06108	1.32087	0.06500	0.37026	0.05565
70	1.94367	0.06957	0.18560	0.05268	1.77280	0.12553	0.17993	0.05060
75	2.27473	0.07445	0.09322	0.05044	2.17311	0.12324	0.06891	0.04956
80	2.61077	0.09091	-0.02282	0.04692	2.52033	0.11001	-0.01526	0.04857

France 2008-2010

Hommes

Femmes

	médiane	+2s	-2s	médiane	+2s	-2s
0	5.62	7.19	4.39	3.65	4.57	2.91
1	0.37	0.56	0.24	0.26	0.41	0.17
5	0.51	0.90	0.29	0.28	0.44	0.18
10	0.73	1.08	0.49	0.40	0.63	0.25
15	1.96	3.02	1.28	0.97	1.50	0.62
20	2.72	4.41	1.67	1.52	2.27	1.02
25	2.89	4.34	1.92	1.92	2.54	1.44
30	3.23	4.57	2.28	2.30	2.72	1.94
35	4.34	5.82	3.24	3.15	3.45	2.87
40	6.80	9.32	4.96	5.07	5.35	4.81
45	12.54	17.25	9.11	9.44	10.88	8.20
50	22.52	31.13	16.29	15.96	19.26	13.23
55	39.23	54.97	27.99	24.90	31.58	19.63
60	66.58	90.59	48.94	40.99	52.11	32.25
65	107.66	142.63	81.26	70.55	91.16	54.60
70	171.73	218.88	134.74	125.03	157.84	99.04
75	281.51	355.12	223.16	224.66	282.26	178.82
80	443.37	550.30	357.21	380.12	475.41	303.94

4. Modèle relationnel de mortalité de W.Brass

Brass, Williame – “On the Scale of Mortality” in W.Brass, ed. *Biological Aspects of Demography*. London: Taylor and Francis Lmt; NY: Barnes & Noble Inc.1971, p.69-110

Rolland Pressat – *Elements de démographie mathématique*, Paris, édition de l'AIDELF, 1995 p.41-47 (“Familles de tables de mortalité”)

La base théorique: la logit-transformation de $q(x)$, la probabilité de mourir avant l'âge x

$$\text{logit}[q(x)] = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[\frac{q(x)}{1-q(x)} \right] \quad \text{où} \quad 0 \leq q(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -\infty \leq \text{logit}[q(x)] \leq +\infty$$

Soit $\text{logit}[q(x)] = Y(x)$ alors $\hat{Y}(x)$ étant la prédiction de la valeur de $Y(x)$ entre $-\infty$ et $+\infty$ permet de prédire la valeur de $q(x)$

$$\text{Donc } \hat{q}(x) = \frac{\exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]} \quad \text{et} \quad \hat{p}(x) = 1 - \hat{q}(x) = \frac{1}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}$$

Modèle (d'origine) de W.Brass $\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$ où $Y^s(x)$ – un standard quelconque

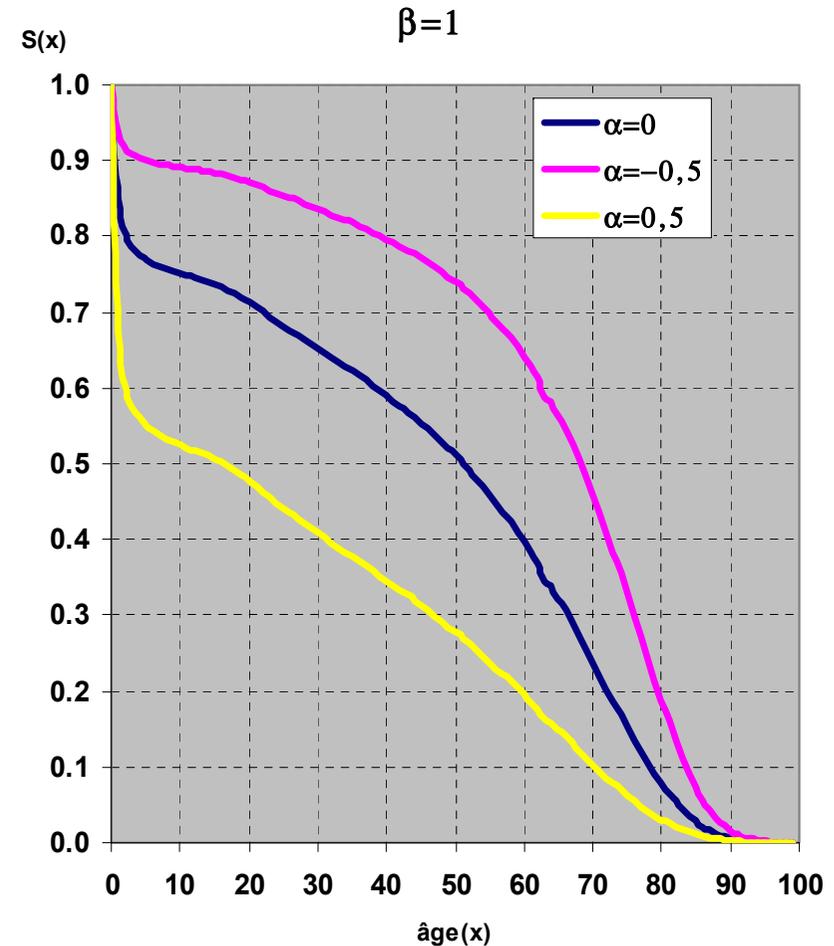
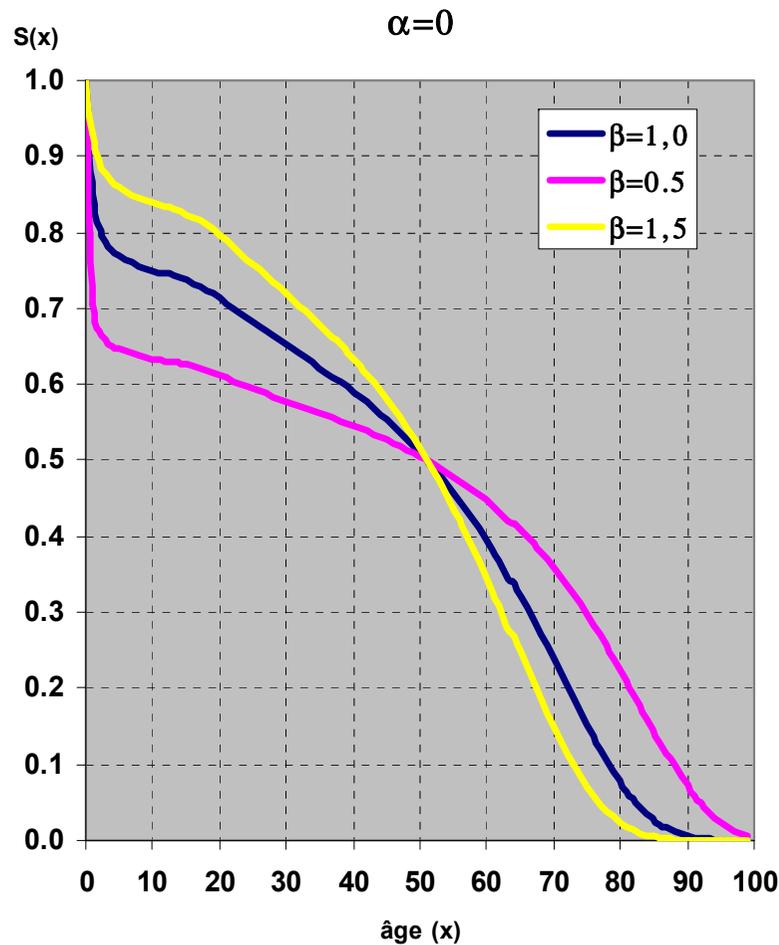
Modification de Ewbank, Gomez de Leon et Soto (1983) (*)

quand λ et $\kappa \rightarrow 0$, ce modèle s'approche de sa version classique. L'augmentation du score de λ et de κ respectivement augmente la survie aux jeunes âges ou la diminue aux âges élevés

$$T^s(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} & \text{quand } p^s(x) \geq 0,5; \\ \text{sinon} \\ \frac{1 - \left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\lambda}{2 \cdot \lambda} & \text{quand } p^s(x) < 0,5; \end{cases}$$

^{1*)} **Ewbank D.C., J.C.Gomez de Leon, M.A. Soto (1983)** – “A Reducible Four-parameter System of Model Life Tables” *Population Studies*. V.37, no 1, p.105-127

Tables de mortalité construites à partir de logit système (standard général de Brass)



Application pour les projections:

1. Choisir le standard (critères: la qualité des données et similarité avec la population à projeter)
2. Analyser la dynamique des paramètres α et β (tendance, régression, etc.)
3. Calculer les tables de mortalité

Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (exemple, France)

$$\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$$

$p(x) = S_x/S_0$ $p(x)$ étant la probabilité de survie jusqu'à l'âge x

$\text{logit } p(x) = \alpha + \beta \cdot \text{logit } p_s(x)$ Deux tables de mortalités différentes sont reliées par la relation linéaire.

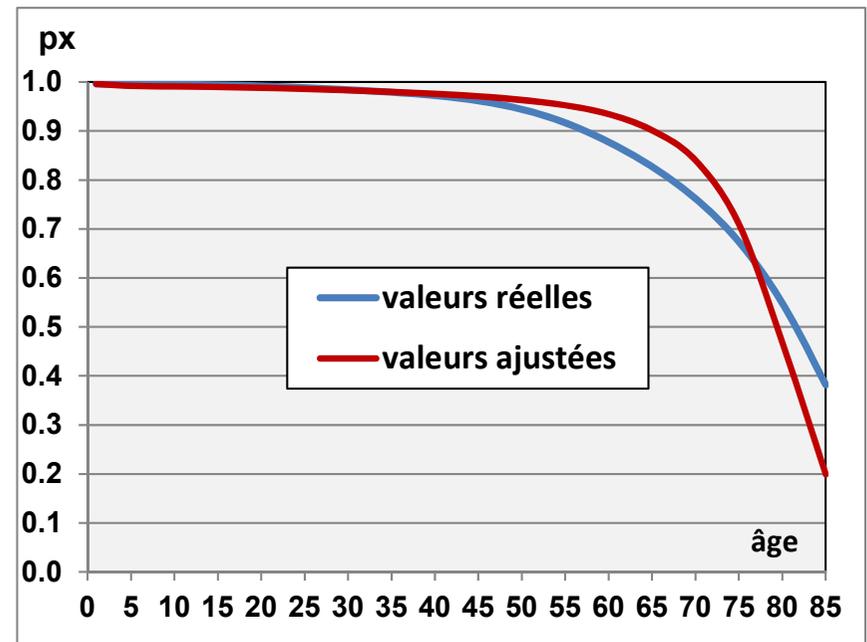
$$\text{logit}[p(x)] = 0.5 \cdot \ln\{p(x)/[1-p(x)]\}$$

$$p(x) = \frac{e^{2 \cdot \text{logit}[p(x)]}}{1 + e^{2 \cdot \text{logit}[p(x)]}}$$

âge	px	logit(px)	logit		
			Brass(px)	px(modèle)	px(modèle)
1	0.99608	2.76887	0.86690	2.76926	0.99608
5	0.99526	2.67348	0.60160	2.41407	0.99206
10	0.99479	2.62598	0.54980	2.34472	0.99089
15	0.99422	2.57378	0.51320	2.29572	0.98996
20	0.99201	2.41077	0.45500	2.21780	0.98829
25	0.98824	2.21561	0.38290	2.12127	0.98583
30	0.98398	2.05888	0.31500	2.03036	0.98306
35	0.97919	1.92565	0.24970	1.94294	0.97988
40	0.97229	1.77893	0.18160	1.85176	0.97596
45	0.96164	1.61081	0.10740	1.75242	0.97083
50	0.94449	1.41704	0.02120	1.63702	0.96353
55	0.91668	1.19903	-0.08320	1.49725	0.95232
60	0.87744	0.98420	-0.21000	1.32748	0.93432
65	0.82702	0.78233	-0.37460	1.10711	0.90152
70	0.76205	0.58198	-0.58180	0.82971	0.84016
75	0.67370	0.36248	-0.86730	0.44748	0.70991
80	0.54873	0.09777	-1.24900	-0.06355	0.46827
85	0.38207	-0.24039	-1.72110	-0.69561	0.19921

a 1.60864 ordonnée à l'origine
b 1.33882 pente

France, Hommes, 2008-2010

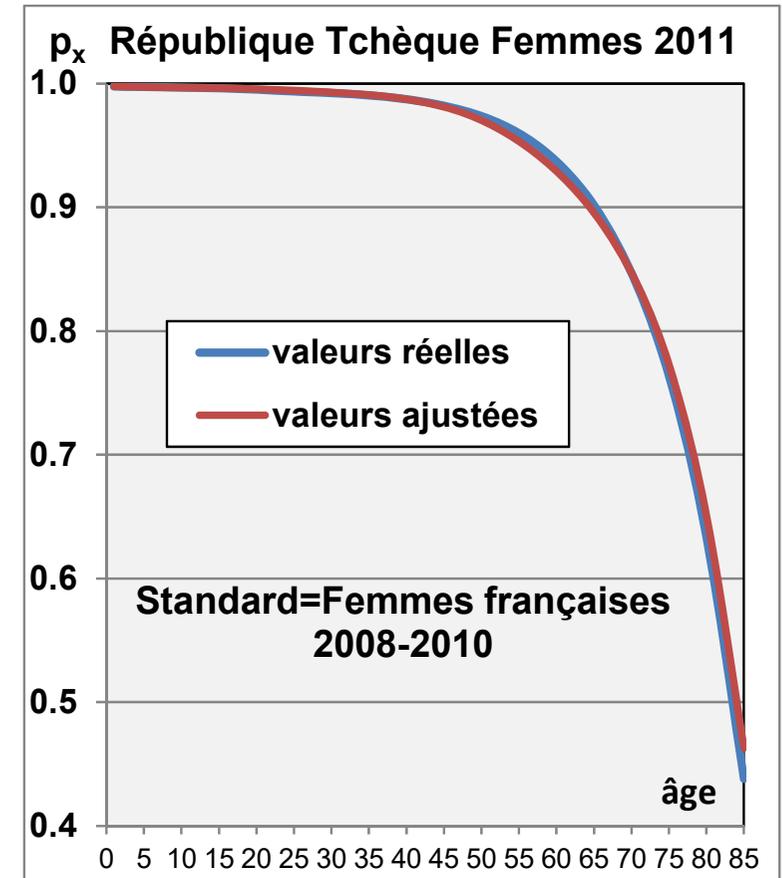


Le standard de Brass (général)
n'est pas convenable.

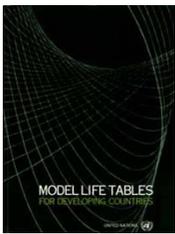
Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (application, RT)

Le standard étant la mortalité des femmes françaises en 2008-2010
L'estimation des valeurs ajustées pour les femmes tchèques en 2011

âge	Rép.Tchèque		standard logit		logit	
	p_x	logit(p_x)	France(p_x)	$p_x(\text{modèle})$	$p_x(\text{modèle})$	
1	0.99766	3.02661	2.85984	3.0190	0.99762	
5	0.99714	2.92777	2.76759	2.9108	0.99705	
10	0.99680	2.87131	2.72009	2.8550	0.99670	
15	0.99617	2.78080	2.67137	2.7978	0.99630	
20	0.99498	2.64435	2.58522	2.6967	0.99547	
25	0.99355	2.51882	2.48758	2.5821	0.99431	
30	0.99231	2.43021	2.39037	2.4680	0.99287	
35	0.99039	2.31765	2.28018	2.3386	0.99078	
40	0.98730	2.17672	2.14051	2.1747	0.98725	
45	0.98200	1.99968	1.96806	1.9722	0.98101	
50	0.97356	1.80311	1.77302	1.7433	0.97030	
55	0.95979	1.58633	1.57173	1.5070	0.95320	
60	0.93698	1.34957	1.38353	1.2861	0.92905	
65	0.90162	1.10770	1.20278	1.0739	0.89547	
70	0.84664	0.85423	1.01646	0.8552	0.84690	
75	0.76367	0.58644	0.80951	0.6123	0.77288	
80	0.63380	0.27428	0.55409	0.3125	0.65136	
85	0.43805	-0.12454	0.22458	-0.0743	0.46293	
		a	-0.33789	ordonnée à l'origine		
		b	1.17382	pente		



Ajustement est satisfaisant
(grâce au choix raisonné du standard)



5 Nouvelles tables type des Nations Unies établies pour les pays en voie de développement (1982)

United Nations (1982) – *Model Life Tables for Developing Countries*. NY, United Nations, Population Studies, no. 77

<https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/manual/model/life-tables.asp>

Données de base: initialement 286 (143+143) tables de mortalité (54 – Afrique, 50 – Amérique Latine, 39 – Asie), après la sélection seulement 72 tables ont été retenues (dont une de l’Afrique – Tunisie)

Principe de construction:

- 1) sélection et classification des tables en appliquant la procédure de Coale-Demeny,
- 2) analyse de composants principaux et
- 3) approche relationnelle de W.Brass pour déterminer les paramètres du modèle dans chaque classe (cluster).

Structure: 4 familles de tables régionales sont retenues; elles sont dérivées du modèle à un paramètre ($k=1$) avec e_{10} comme entrée unique et la possibilité de modifier le scénario de mortalité en modifiant les autres paramètres du modèle de base.

$$\text{logit } {}_n q_x = U_{0x}^C + \sum_{i=1}^k a_i \cdot U_{ix}^C$$

U_{0x}^C – le standard ou la moyenne pour la famille C

U_{ix}^C – les caractéristiques de la déviation du standard C

a_i – l’ampleur de la déviation du standard

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Nations Unies 1983

Type « Amérique Latine »

Donnée de base: Tables en provenance de l'Amérique Latine, Philippines, Sri Lanka et Thaïlande

Particularités: la mortalité juvénile et la mortalité des jeunes adultes sont extrêmement hautes, en revanche la mortalité infantile et la mortalité aux âges élevés est relativement basse

Type « Chili »

Donnée de base: Chili (1950, 1960, 1970)

Particularités: la mortalité infantile est très élevée à cause (probablement) des maladies respiratoires

Type « Asie du Sud »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie du Sud, d'Asie de l'Ouest et de Tunisie

Particularités: la mortalité est forte aux âges jeunes et aux âges élevés

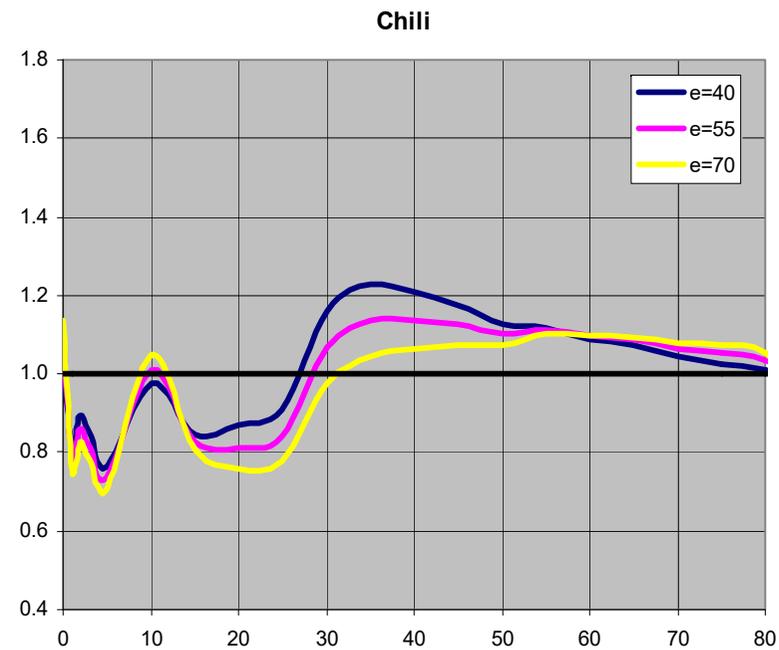
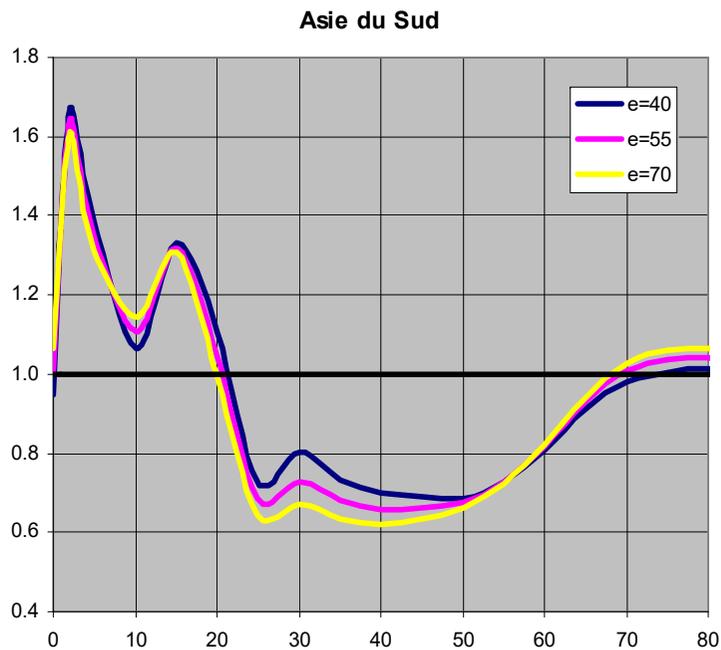
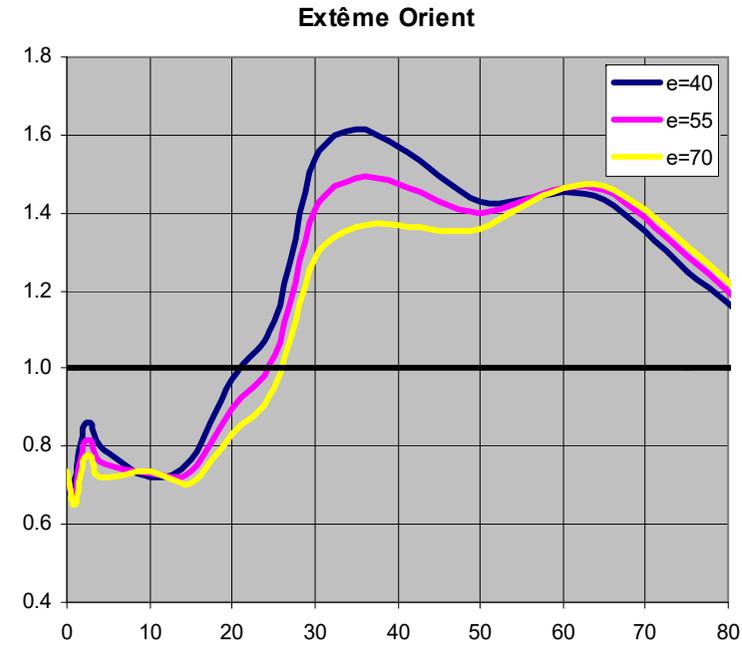
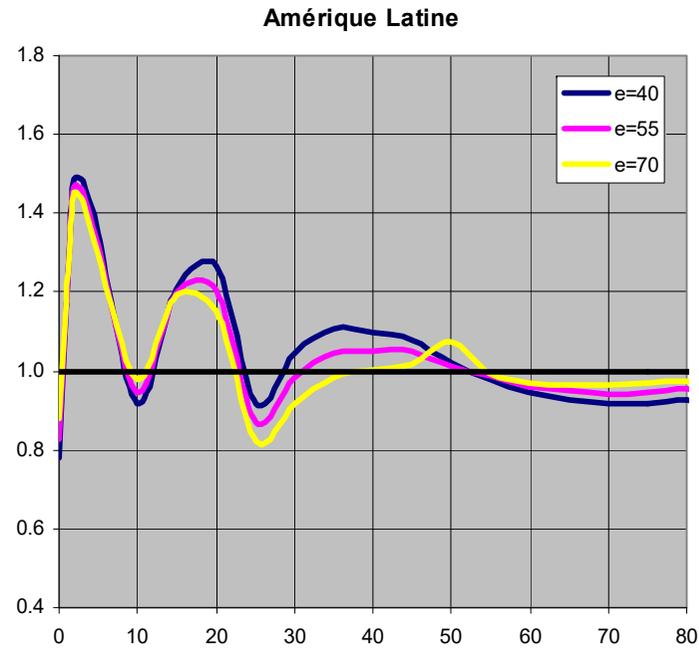
Type « Extrême Orient »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie de l'Est mais aussi de la Malaisie, de la Guyane et de Trinidad et Tobago

Particularités: la mortalité est forte après l'âge 40 et surtout parmi les personnes âgées, probablement à cause de la tuberculose et de l'hépatite B.

Particularité de la mortalité régionale des tables des NU 1982 par rapport aux tables « Ouest » de C.-D.1983 (niveau 9, 15, 21)

$$\frac{{}_n q_x}{{}_n q_x^W}$$



âge

Choix d'une table (type) de mortalité à partir des données incomplètes et déficientes

Procédure : BESTFT

cherche un-, deux-, ou trois-composants UN et CD tables de mortalité qui ajuste mieux les valeurs de ${}_nq_x$

Selected application is BESTFT (bestft.mpl)
 Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\bestft.mpl
 When last updated: 13 February 2002

TITLE: HYPOTHETICAL FEMALES
 Sex: Females
 Model life table pattern: User-defined model
 TITLE, user-defined model: BRASS AFRICAN STANDARD

TITLE: HYPOTHETICAL FEMALES
 Sex: Females
 Model life table pattern: United Nations Chilean

Age Group q(x,n)

Age Group	q(x,n)	Predicted q(x,n) values based on		
		one components	two components	three components
0 - 1	0.22000	0.11980	0.13147	0.21866
1 - 5	0.10668	0.10668	0.12537	0.19593
5 - 10	0.04591	0.04591	0.05470	0.03806
10 - 15	0.01866	0.01866	0.02226	0.01669
15 - 20	0.03151	0.03151	0.03778	0.02831
20 - 25	0.04264	0.04264	0.05109	0.03583
25 - 30	0.04410	0.04410	0.05230	0.03778
30 - 35	0.04628	0.04628	0.05433	0.04351
35 - 40	0.04500	0.04500	0.06022	0.05074
40 - 45	0.06200	0.06200	0.06944	0.06088
45 - 50	0.08300	0.08300	0.08590	0.07293
50 - 55	0.10204	0.10204	0.11160	0.09325
55 - 60	0.13522	0.13522	0.14627	0.11832
60 - 65	0.19042	0.19042	0.20355	0.16865
65 - 70	0.25857	0.25857	0.27299	0.21208
70 - 75	0.36975	0.36975	0.38590	0.28569
75 - 80	0.49333	0.49333	0.51018	0.37826
80 - 85	0.59211	0.59211	0.60576	0.40212

Predicted q(x,n) values extrapolated to age 100+ based on one component fit

Age	m(x,n)	q(x,n)	l(x)	d(x,n)	L(x,n)	S(x,n)	T(x)	e(x)	a(x,n)
0	0.14375	0.13147	100000.	13147.	91454.	0.82026	4035915.	40.359	0.350
1	0.03417	0.12537	86853.	10889.	318677.	0.90077	3944460.	45.415	1.361
5	0.01125	0.05470	75964.	4155.	369433.	0.96106	3625784.	47.730	2.500
10	0.00450	0.02226	71809.	1598.	355049.	0.97126	3256351.	45.347	2.500
15	0.00769	0.03778	70211.	2653.	344846.	0.95499	2901302.	41.323	2.660
20	0.01048	0.05109	67558.	3452.	329326.	0.94775	2556456.	37.841	2.548
25	0.01074	0.05230	64106.	3353.	312120.	0.94688	2227130.	34.741	2.491
30	0.01117	0.05433	60754.	3301.	295539.	0.94305	1915011.	31.521	2.507
35	0.01241	0.06022	57453.	3460.	278708.	0.93563	1619471.	28.188	2.527
40	0.01438	0.06944	53993.	3749.	260767.	0.92310	1340764.	24.832	2.547
45	0.01793	0.08590	50244.	4316.	240714.	0.90221	1079997.	21.495	2.566
50	0.02360	0.11160	45928.	5126.	217175.	0.87261	839283.	18.274	2.568
55	0.03149	0.14627	40802.	5968.	189508.	0.82743	622108.	15.247	2.570
60	0.04522	0.20355	34834.	7090.	156804.	0.76513	432600.	12.419	2.551
65	0.06313	0.27299	27744.	7574.	119975.	0.67620	275796.	9.941	2.525
70	0.09594	0.38590	20170.	7784.	81127.	0.55629	155821.	7.725	2.466
75	0.14002	0.51018	12386.	6319.	45130.	0.44861	74694.	6.030	2.341
80	0.18153	0.60576	6067.	3675.	20246.	0.34983	29565.	4.873	2.255
85	0.23818	0.70528	2392.	1687.	7083.	0.26012	9319.	3.896	2.109
90	0.30092	0.78645	705.	554.	1842.	0.18713	2236.	3.172	1.965
95	0.37107	0.84980	151.	128.	345.	0.12479	394.	2.617	1.811
100	0.45997	...	23.	23.	49.	...	49.	2.174	2.174

First entry of S(x,n) is for survivorship of 5 cohorts of birth to age group 0-4 = L(0,5) / 500000
 Second entry of S(x,n) is for S(0,5) = L(5,5) / L(0,5)
 Last entry of S(x,n) is S(95+,5) = T(100) / T(95)

Modifications et perfectionnement récents des tables type de mortalité (UN version 2010)

World Population Prospects 2010 : Extended Model Life Tables

« With the extension of the projection horizon for all countries up to 2100 as part of the *2010 revision* of the *UN World Population Prospects*, it was necessary to allow life expectancy at birth to go beyond 92.5 years. In addition, in-depth analysis of the initial 1998 extension revealed substantial deviation for out-of-sample predictions compared to the Human Mortality Database experience at very low mortality levels (especially for Coale-Demeny models, see Figure 1 in Willmoth et al., 2009), and the need to improve a smoother transition between the existing set of model life tables up to age 75 and their extension. A new set extended model life tables was computed in Spring 2010 by staff of the Population Division (Gerland and Li) based on the modified Lee-Carter approach. After extensive cross-validation against the Human Mortality Database (HMD) performed by Kirill Andreev some constraints have been imposed to ensure some convergence toward the HMD mortality experience at high levels of $e(0)$. The nine families of model life tables extended up to $e(0)=100$ were smoothly blended to the existing ones to insure smooth mortality surfaces by age and sex and $e(0)$ levels. »

De nouvelles tables type de mortalité sont téléchargeables à partir

<http://esa.un.org/wpp/Model-Life-Tables/download-page.html> et <https://www.un.org/development/desa/pd/data/model-life-tables>

Literature: Li, N. and P. Gerland (2011). "Modifying the Lee-Carter Method to Project Mortality Changes up to 2100" Paper presented at the 2011 Annual Meeting of the Population Association of America (PAA) in Session 125: Formal Demography I: Mathematical Models and Methods on Friday 1 April - <http://paa2011.princeton.edu/sessionViewer.aspx?SessionId=1002>



Procédure : UNABR

Selected application is UNABR (unabr.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\unabr.mpl
When last updated: 11 February 2002

Gr

TITLE: HYPOTHETICAL POPULATION									
Age Group	Observed q(x,n)	Fitted q(x,n)	Difference	Ratio	Unabridged life table				
					Age	m(x,n)	q(x,n)	l(x)	e(x)
0 - 1	0.03500	0.03500	0.00000	1.00	0	0.03588	0.03500	100000	69.79
1 - 5	0.00600	0.00606	0.00006	1.01	1	0.00246	0.00246	96500	71.31
5 - 10	0.00350	0.00334	-0.00016	0.95	2	0.00153	0.00153	96263	70.49
10 - 15	0.00290	0.00310	0.00020	1.07	3	0.00115	0.00115	96115	69.60
15 - 20	0.00570	0.00510	-0.00060	0.89	4	0.00094	0.00094	96005	68.67
20 - 25	0.00765	0.00825	0.00060	1.08	5	0.00080	0.00080	95915	67.74
25 - 30	0.01120	0.01104	-0.00016	0.99	6	0.00071	0.00071	95838	66.79
30 - 35	0.01350	0.01320	-0.00030	0.98	7	0.00065	0.00065	95769	65.84
35 - 40	0.01575	0.01553	-0.00022	0.99	8	0.00060	0.00060	95707	64.88
40 - 45	0.01825	0.01921	0.00096	1.05	9	0.00058	0.00058	95649	63.92
45 - 50	0.02750	0.02566	-0.00184	0.93	10	0.00057	0.00057	95594	62.96
50 - 55	0.03500	0.03661	0.00161	1.05	11	0.00057	0.00057	95540	61.99
55 - 60	0.05500	0.05443	-0.00057	0.99	12	0.00060	0.00060	95485	61.03
60 - 65	0.08500	0.08247	-0.00253	0.97	13	0.00065	0.00065	95428	60.07
65 - 70	0.12500	0.12526	0.00026	1.00	14	0.00071	0.00071	95366	59.10
70 - 75	0.18500	0.18844	0.00344	1.02	15	0.00080	0.00080	95298	58.15
75 - 80					16	0.00090	0.00090	95222	57.19
80 - 85					17	0.00101	0.00101	95136	56.24
					18	0.00114	0.00113	95040	55.30
					19	0.00126	0.00126	94932	54.36
					20	0.00140	0.00140	94812	53.43
					21	0.00153	0.00153	94680	52.50
					22	0.00166	0.00166	94535	51.58
					23	0.00179	0.00178	94378	50.67
					24	0.00191	0.00190	94210	49.76
					25	0.00202	0.00202	94030	48.85
					26	0.00213	0.00212	93841	47.95
					27	0.00223	0.00222	93641	47.05
					28	0.00232	0.00232	93433	46.15
					29	0.00241	0.00241	93217	45.26
					30	0.00249	0.00249	92992	44.37
					31	0.00258	0.00257	92761	43.48
					32	0.00266	0.00265	92522	42.59

Parameters	
A=	0.00241
B=	0.00582
C=	0.11400
D=	0.00146
E=	3.11948
F=	30.56860
G=	0.00006
H=	1.09593

Procédure : COMPAR

Selected application is COMPAR (compar.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\compar.mpl
When last updated: 04 January 2002

Comparison of empirical mortality rate

Sex: Females										
Data Type: q(x,n)										
Implied Life Expectancy at Birth										
Age Group	Empirical q(x,n)	United Nations Models					Coale-Demeny Models			
		Latin Am.	Chilean	So. Asian	Far East	General	West	North	East	South
0 - 1	0.11856	47.9	55.3	53.8	42.1	46.8	50.1	47.3	54.8	53.3
1 - 5	0.09301	50.0	40.4	51.7	39.1	46.0	45.2	48.7	44.2	51.2
5 - 10	0.02970	47.5	37.4	45.9	39.4	45.6	43.1	53.6	43.1	45.2
10 - 15	0.01687	45.8	42.8	40.6	44.3	46.5	49.8	53.7	43.6	45.4
15 - 20	0.02066	48.0	48.4	43.8	52.3	50.3	52.2	51.9	46.5	48.3
20 - 25	0.02531	50.3	50.9	43.6	54.2	52.1	53.2	51.3	48.0	49.0
25 - 30	0.02866	51.2	51.6	42.4	55.4	52.4	53.3	51.8	48.8	48.5
30 - 35	0.03173	52.2	52.7	43.2	55.9	53.3	53.7	52.6	49.0	47.4
35 - 40	0.03560	53.1	53.4	43.2	57.1	53.7	53.8	53.1	49.1	46.7
40 - 45	0.03986	53.3	54.6	44.3	58.7	54.5	54.2	53.8	48.9	46.0
45 - 50	0.04466	55.2	57.2	47.9	62.2	57.2	55.9	53.7	50.7	46.0
50 - 55	0.05829	55.0	57.6	52.2	63.9	58.5	57.1	53.3	52.2	46.8
55 - 60	0.07924	56.1	59.0	56.3	65.3	60.0	57.3	52.6	54.6	47.5
60 - 65	0.12069	54.4	57.4	57.5	64.3	58.9	56.5	51.0	55.0	49.2
65 - 70	0.18452	53.2	56.9	56.6	62.6	57.6	54.1	50.1	56.0	49.9
70 - 75	0.28516	48.8	52.1	54.3	58.9	54.6	51.8	48.1	56.2	51.5
75 - 80	0.41943	42.4	46.4	51.1	54.0	50.9	49.5	46.2	57.1	53.7
Average absolute deviation from the median										
Ages 0 to 10		0.8	6.0	2.7	1.0	0.4	2.3	2.1	3.9	2.7
Ages 10 and over		3.0	3.7	5.3	4.5	3.0	1.8	1.6	3.4	1.7
Ages 0 and over		3.1	4.8	5.1	6.6	3.8	2.8	1.9	3.8	2.1
Medn(0-10)-Medn(10+)		-4.8	-12.6	5.6	-18.5	-8.1	-8.5	-3.6	-5.7	3.4



Procédure : MATCH

Table définie par l'utilisateur →

Selected application is MATCH (match.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\match.mpl
When last updated: 05 October 2011

Calculation of United Nations, Coale-Demeny or user-designated model life table.

TITLE: HYPOTHETICAL COUNTRY

Sex: Females

Model life table pattern: User-defined model
TITLE, user-defined model: NEIGHBORING COUNTRY

The desired model life table has a value of: 65.000 for column: e(x) at age x: 0

Desired value for final table: 70
Increment between tables: 1

Age	m(x,n)	q(x,n)	l(x)	d(x,n)	L(x,n)	S(x,n)	T(x)	e(x)	a(x,n)	Summary table
0	0.06207	0.05923	100000	5923	95425	0.93035	6699972	67.000	0.228	q(0.5)= 0.08472
1	0.00689	0.02709	94077	2549	369750	0.97979	6604547	70.204	1.428	q(15.20)= 0.14228
5	0.00163	0.00814	91528	745	455776	0.99356	6234797	68.119	2.500	q(15.35)= 0.07674
10	0.00095	0.00473	90783	429	452841	0.99497	5779021	63.658	2.500	q(15.45)= 0.28220
15	0.00110	0.00549	90353	496	450562	0.99396	5326180	58.948	2.569	q(30.40)= 0.54443
20	0.00134	0.00666	89858	598	447841	0.99261	4875618	54.259	2.560	q(60.20)= 0.56641
25	0.00164	0.00815	89259	727	444533	0.99111	4427777	49.606	2.576	
30	0.00195	0.00972	88532	860	440581	0.98903	3983244	44.992	2.584	
35	0.00250	0.01243	87671	1089	435746	0.98574	3542663	40.408	2.603	
40	0.00328	0.01626	86582	1408	429531	0.98174	3106917	35.884	2.599	
45	0.00416	0.02060	85174	1755	421887	0.97542	2677386	31.434	2.616	
50	0.00596	0.02937	83419	2450	411322	0.96458	2255699	27.040	2.642	
55	0.00875	0.04288	80969	3472	396752	0.94480	1844377	22.779	2.668	
60	0.01458	0.07052	77498	5465	374850	0.90819	1447625	18.680	2.688	
65	0.02492	0.11778	72032	8484	340434	0.84658	1072775	14.893	2.675	
70	0.04329	0.19633	63548	12476	288205	0.75319	732341	11.524	2.633	
75	0.07263	0.30870	51072	15766	217072	0.51125	444136	8.696	2.572	
80	0.15549	...	35306	35306	227065	...	227065	6.431	6.431	

First entry of S(x,n) is for survivorship of 5 cohorts of birth to age group 0-4 = L(0.5) / 500000
Second entry of S(x,n) is for S(0.5) = L(5.5) / L(0.5)
Last entry of S(x,n) is S(75+.5) = T(80) / T(75)

Table type sélectionnée par l'utilisateur →

Selected application is MATCH (match.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\match.mpl
When last updated: 05 October 2011

Calculation of United Nations, Coale-Demeny or user-designated model life table.

TITLE: HYPOTHETICAL COUNTRY

Sex: Females

Model life table pattern: Coale-Demeny North

The desired model life table has a value of: 65.000 for column: e(x) at age x: 0

Desired value for final table: 70
Increment between tables: 1

Age	m(x,n)	q(x,n)	l(x)	d(x,n)	L(x,n)	S(x,n)	T(x)	e(x)	a(x,n)	Summary table
0	0.05105	0.04904	100000	4904	96063	0.93942	6500000	65.000	0.197	q(0.5)= 0.07540
1	0.00706	0.02772	95096	2636	373646	0.97825	6403937	67.342	1.444	q(15.20)= 0.05193
5	0.00244	0.01214	92460	1122	459494	0.99006	6030291	65.221	2.500	q(15.35)= 0.11764
10	0.00155	0.00773	91338	706	454924	0.99146	5570797	60.991	2.500	q(15.45)= 0.19729
15	0.00196	0.00973	90632	882	451039	0.98891	5115873	56.447	2.596	q(30.40)= 0.33336
20	0.00251	0.01247	89750	1119	446039	0.98650	4664834	51.976	2.578	q(60.20)= 0.56166
25	0.00291	0.01445	88631	1281	440017	0.98464	4218795	47.600	2.550	
30	0.00329	0.01631	87350	1424	433260	0.98253	3778778	43.260	2.549	
35	0.00381	0.01887	85926	1622	425691	0.97876	3345519	38.935	2.572	
40	0.00482	0.02382	84304	2008	416651	0.97416	2919828	34.634	2.575	
45	0.00573	0.02826	82296	2326	405887	0.96861	2503176	30.417	2.595	
50	0.00804	0.03944	79970	3154	392334	0.95443	2097290	26.226	2.616	
55	0.01086	0.05292	76816	4065	374456	0.93447	1704956	22.195	2.632	
60	0.01689	0.08122	72751	5909	349917	0.89723	1330500	18.288	2.658	
65	0.02743	0.12883	66842	8612	313955	0.83711	980583	14.670	2.648	
70	0.04515	0.20379	56231	11867	262814	0.74727	666628	11.448	2.612	
75	0.07370	0.31218	46364	14474	196393	0.51366	403814	8.710	2.552	
80	0.15374	...	31890	31890	207421	...	207421	6.504	6.504	

First entry of S(x,n) is for survivorship of 5 cohorts of birth to age group 0-4 = L(0.5) / 500000
Second entry of S(x,n) is for S(0.5) = L(5.5) / L(0.5)
Last entry of S(x,n) is S(75+.5) = T(80) / T(75)